

FORTSCHRITTE DER PHYSIK

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

IN DER

DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK

VON RUDOLF RITSCHL UND ROBERT ROMPE

BAND 9 • HEFT 10 • 1961



AKADEMIE-VERLAG • BERLIN

I N H A L T

	Seite
A. M. DYCHNE und J. B. RUMER: Thermodynamik ebener Ising-Onsager Dipolgitter	509
R. V. POLOVIN: Stoßwellen in der Magnetohydrodynamik (Uspechi fiz. Nauk. 72, 35, 1960)	526

Die „FORTSCHRITTE DER PHYSIK“ sind durch den Buchhandel zu beziehen.
Falls keine Bezugsmöglichkeit durch eine Buchhandlung vorhanden ist, wenden
Sie sich bitte

in der Deutschen Demokratischen Republik

an den AKADEMIE-VERLAG, GmbH., Berlin W 8, Leipziger Straße 3—4

in der Deutschen Bundesrepublik

an die Auslieferungsstelle: KUNST UND WISSEN, Inhaber Erich Bieber,
Stuttgart S, Wilhelmstraße 4—6

bei Wohnsitz im Ausland

an den Deutschen Buch-Export und -Import, GmbH., Leipzig C 1, Post-
schließfach 276

oder direkt an den AKADEMIE-VERLAG, GmbH., Berlin W 8, Leipziger
Straße 3—4

Thermodynamik des ebenen Ising-Onsager-Dipolgitters¹⁾

A. M. DYCHNE und J. B. RUMER

Die Thermodynamik des ebenen Dipolgitters ist von großem Interesse; denn dies ist das einzige Modell eines Systems, das einen Phasenübergang zweiter Art erleidet, der eine exakte Lösung zuläßt. Die Lösung des Problems wurde in den Arbeiten [1] und [2] gegeben. Die in diesen Arbeiten entwickelte Methodik läßt aber prinzipiell keine Verallgemeinerung auf den Fall des dreidimensionalen Gitters zu.

Eine Übersicht über die genannten Arbeiten gab einer der Verfasser dieses Aufsatzes (J. R.) im Jahre 1954 [3].

Vor kurzem erschien eine Arbeit von HURST und GREEN [4], die großes Interesse beansprucht und wesentlich neue Gedanken für das Herangehen an die Lösung dieser Aufgabe enthält. Die neue Methode ergibt eine einfachere Lösung als [1] und [2], und — was die Hauptsache ist — es ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, sie auf das dreidimensionale Gitter zu verallgemeinern. Daher hielten wir es für zweckmäßig, die neue Methode in Form einer Übersicht darzustellen.

§ 1. Die Zustandssumme

Gegeben sei ein rechtwinkliges Gitter, das aus m Spalten und n Zeilen besteht und $N = nm$ Gitterpunkte enthält. Wir numerieren die Gitterpunkte in lexikographischer Ordnung, d. h., wir bezeichnen jeden Gitterpunkt mit der Nummer

$$k = (k_2 - 1)m + k_1; \quad 1 \leq k_1 \leq m; \quad 1 \leq k_2 \leq n, \quad (1)$$

wo k_2 die Nummer der Zeile ist und k_1 die Nummer der Spalte, in denen der betreffende Gitterpunkt liegt.

Um Randeffekte zu beseitigen, verwenden wir periodische Randwerte; d. h., wir schließen das Gitter in beiden Richtungen ab, indem wir die $(m + 1)$ -te Spalte mit der 1. Spalte und die $(n + 1)$ -te Zeile mit der ersten Zeile identifizieren.

In jeden der Gitterpunkte setzen wir einen Dipol, dessen Achse senkrecht auf der Gitterebene steht. Jeder der Dipole kann eine der beiden möglichen, einander entgegengesetzten Orientierungen haben. Offensichtlich ist die Gesamtzahl der möglichen Konfigurationen der Dipole in dem Gitter gleich 2^N .

Zur Beschreibung der verschiedenen Konfigurationen gehen wir folgendermaßen vor: Wir schreiben jedem Dipol eine diskrete Veränderliche σ zu, die nur zwei Werte annehmen kann. Es ist $\sigma = +1$, wenn der Dipol nach rechts orientiert ist, und $\sigma = -1$, wenn der Dipol nach links orientiert ist.

¹⁾ A. M. DYCHNE i J. B. RUMER, Termodinamika ploskoj dipol'noj rešetki Izinga-Onsagera. Erscheint gleichzeitig in den Uspechi fiz. Nauk.

Wenn wir nur die Wechselwirkung zwischen den am nächsten liegenden Nachbarn berücksichtigen und die zwischen den weiter voneinander entfernten Dipolen vernachlässigen, kann die Konfigurationsenergie $E(\sigma_1 \dots \sigma_N)$ in folgender Form dargestellt werden:

$$E(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N) = \sum_{k=1}^{k=N} (J_1 \sigma_k \sigma_{k+1} + J_2 \sigma_k \sigma_{k+m}). \quad (2)$$

Darin ist $\pm J_1$ die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei benachbarten Dipolen, die in ein und derselben Zeile liegen bei gleicher bzw. entgegengesetzter Orientierung der Dipole. Analog bezeichnen wir mit $\pm J_2$ die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei benachbarten Dipolen, die in ein und derselben Spalte liegen. Für die Zustandssumme erhalten wir den Ausdruck¹⁾:

$$\begin{aligned} Z(T) &= \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} \exp [-E(\sigma_1 \dots \sigma_N)/T] = \\ &= \sum_{(\sigma)} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{k=N} (\theta_1 \sigma_k \sigma_{k+1} + \theta_2 \sigma_k \sigma_{k+m}) \right\} = \\ &= \sum_{(\sigma)} \prod_{k=1}^N \exp (-\theta_1 \sigma_k \sigma_{k+1}) \exp (-\theta_2 \sigma_k \sigma_{k+m}). \end{aligned} \quad (3)$$

Darin bedeutet $\sum_{(\sigma)}$ die Summation über alle 2^N möglichen Konfigurationen der Dipole. Außerdem wurden die Bezeichnungen

$$\theta_1 = \frac{J_1}{T}; \quad \theta_2 = \frac{J_2}{T} \quad (4)$$

eingeführt. Berücksichtigen wir, daß $\sigma_i^2 = 1$ ist, so erhalten wir die Formel

$$\exp (\alpha \sigma_i \sigma_k) = \operatorname{ch} \alpha + \sigma_i \sigma_k \operatorname{sh} \alpha = \frac{1 + \sigma_i \sigma_k \operatorname{th} \alpha}{(1 - \operatorname{th}^2 \alpha)^{1/2}}. \quad (5)$$

Mit den Bezeichnungen

$$x = \operatorname{th} \theta_1; \quad y = \operatorname{th} \theta_2$$

können wir $Z(T)$ in folgender Form schreiben

$$Z(T) = [(1 - x^2)(1 - y^2)]^{-N/2} \sum_{(\sigma)} \prod_{k=1}^N (1 - x \sigma_k \sigma_{k+1}) (1 - y \sigma_k \sigma_{k+m}). \quad (6)$$

§ 2. Die Methode der Graphen

Das in (6) vorkommende Produkt

$$G(x, y, \sigma_1 \dots \sigma_N) = \prod_{k=1}^{k=N} (1 - x \sigma_k \sigma_{k+1}) (1 - y \sigma_k \sigma_{k+m}) \quad (7)$$

ist ein Polynom der Veränderlichen $x, y, \sigma_1, \dots, \sigma_N$. Da G in (6) hinter dem Summenzeichen der Summe über alle Konfigurationen steht, liefern nicht alle

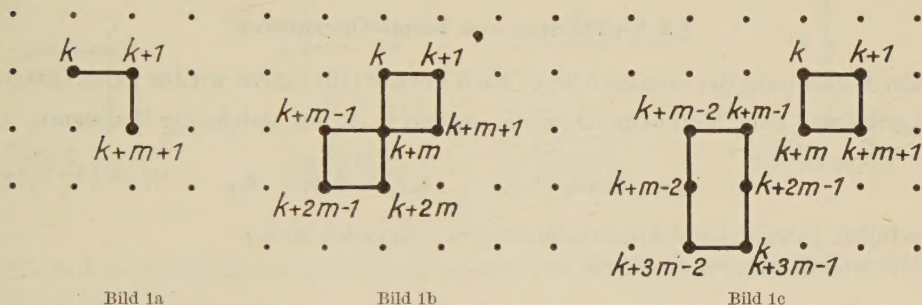
¹⁾ Statt kT wird stets nur T geschrieben (Anm. d. deutsch. Red.).

Glieder des Polynoms einen von Null verschiedenen Beitrag zur Zustandssumme. Wir werden zeigen, daß nur diejenigen Glieder einen von Null verschiedenen Beitrag geben, die alle Veränderlichen $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ in der 0., 2. und 4. Potenz enthalten. Es genügt offensichtlich, diese Behauptung für irgendeine ausgewählte Veränderliche zu beweisen, etwa für σ_i .

Wir sondern in G alle Faktoren aus, die σ_i enthalten. Offensichtlich sind dies vier Faktoren, und wir können (6) in der Form

$$Z(x, y) = [(1 - x^2)(1 - y^2)]^{-N/2} \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \sigma_{i+1} \dots \sigma_N} G^{(i)}(x, y, \sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \sigma_{i+1} \dots \sigma_N) \times \\ \times \sum_{\sigma_i} (1 - x \sigma_i \sigma_{i-1})(1 - x \sigma_i \sigma_{i+1})(1 - y \sigma_i \sigma_{i-m})(1 - y \sigma_i \sigma_{i+m}) \quad (8)$$

schreiben, wo wir mit $G^{(i)}$ die Gesamtheit aller Faktoren bezeichnen, die die Veränderliche σ_i nicht enthalten. Führen wir in (8) die innere Summation nach σ_i aus,



so überzeugen wir uns davon, daß nur die Glieder des Polynoms G einen von Null verschiedenen Beitrag zu $Z(x, y)$ liefern, die σ_i in der 0., 2. und 4. Potenz enthalten. Diese Überlegung gilt offenbar für alle Veränderlichen σ_i .

Da $\sigma_i^2 = 1$ ist, liefert jedes Glied des Polynoms, das alle Veränderlichen $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ in geraden Potenzen enthält, nach dem Summieren über alle Konfigurationen einen Beitrag, welcher der Gesamtzahl der Konfigurationen 2^N proportional ist.

Wir kommen zur Methode der Graphen, indem wir bemerken, daß man jedem Glied des Polynoms $G(x, y, \sigma_1, \dots, \sigma_N)$ eindeutig eine Gesamtheit von Linien zuordnen kann, die gewisse Paare von benachbarten Gitterpunkten verbinden.

So entsprechen z. B. den Graphen von Bild 1 (a, b, c) die Glieder des Polynoms:

$$1a \quad \sigma_k \sigma_{k+1}^2 \sigma_{k+m+1},$$

$$1b \quad \sigma_k^2 \sigma_{k+1}^2 \sigma_{k+m-1}^2 \sigma_{k+m}^4 \sigma_{k+m+1}^2 \sigma_{k+2m-1}^2 \sigma_{k+2m}^2,$$

$$1c \quad \sigma_k^2 \sigma_{k+1}^2 \sigma_{k+m-2}^2 \sigma_{k+m-1}^2 \sigma_{k+m}^2 \sigma_{k+m+1}^2 \sigma_{k+2m-2}^2 \sigma_{k+2m-1}^2 \sigma_{k+3m-2}^2 \sigma_{k+3m-1}^2.$$

Wie Formel (7) zeigt, entspricht jeder horizontalen Linie der Faktor x und jeder vertikalen der Faktor y .

Wir haben oben bewiesen, daß nur diejenigen Glieder des Polynoms G einen von Null verschiedenen Beitrag zur Zustandssumme beisteuern, die die Veränderlichen $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ in der 0., 2. und 4. Potenz enthalten.

Geometrisch bedeutet dies, daß aus der Gesamtheit der möglichen Graphen nur diejenigen einen von Null verschiedenen Beitrag zur Zustandssumme beisteuern,

bei denen in jedem Gitterpunkt 0, 2 oder 4 Linien zusammentreffen. Einfachste Beispiele solcher Graphen zeigen Bild 1 b und 1 c. Alle Graphen, die einen von Null verschiedenen Beitrag liefern, müssen also geschlossen sein; dabei ist es in einigen Gitterpunkten möglich, daß sie sich einmal selbst schneiden (Gitterpunkt $k + m$ von Bild 1 b).

Die Zustandssumme kann also in folgender Form dargestellt werden:

$$Z(x, y) = 2^N [(1 - x^2)(1 - y^2)]^{-N/2} S(x, y) \quad (9)$$

$$S(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta. \quad (10)$$

Darin ist $g_{\alpha\beta}$ die Zahl der geschlossenen Graphen, die aus α horizontalen und β vertikalen Linien bestehen; dabei wird bei der Zählung jeder Graph mit vielen Verbindungen als einziger gezählt (z. B. der Graph von Bild 1 c).

§ 3. Einführung von Fermi-Operatoren

Zur Berechnung der Summe $S(x, y)$ nach Formel (10) führen wir für jeden Gitterpunkt zwei Paar Fermi-Operatoren $\overset{+}{a}_k, a_k$ und $\overset{+}{b}_k, b_k$ ein, welche die Bedingung

$$\overset{+}{a}_k a_i + a_i \overset{+}{a}_k = \delta_{ik}; \quad \overset{+}{b}_k b_i + b_i \overset{+}{b}_k = \delta_{ik} \quad (11)$$

erfüllen. (Alle anderen Antikommutatoren sind gleich Null.)

Wir wollen nun den Ausdruck

$$\begin{aligned} S(x, y) = \text{Sp} \prod_k & \left(1 + 4xy a_{k+1} b_{k+m} \overset{+}{a}_k \overset{+}{b}_k + 4xy \overset{+}{a}_k \overset{+}{b}_k + a_{k+1} b_{k+m} + \right. \\ & \left. + 2x \overset{+}{a}_k b_{k+m} + 2y \overset{+}{b}_k a_{k+1} + 2x a_{k+1} \overset{+}{a}_k + 2y b_{k+m} \overset{+}{b}_k \right) \end{aligned} \quad (12)$$

berechnen und beweisen, daß $S(x, y) = S^*(x, y)$ ist.

Wir bemerken noch, daß hier und überall später der Bequemlichkeit halber mit dem Symbol $\text{Sp } C$ die Größe $\text{Sp } C / \text{Sp } E$ bezeichnet wird, wo E die Einheitsmatrix der Dimension C ist. Bei dieser Schreibweise wirkt sich die Dimension der hinter dem Spurzeichen auftretenden Matrizen nicht auf die Resultate aus.

Wir lösen das hinter dem Spurzeichen stehende Produkt auf und fassen die Glieder mit gleichen Potenzen $(2x)^\alpha (2y)^\beta$ zusammen. Dann erhalten wir

$$S^*(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} (2x)^\alpha (2y)^\beta \text{Sp} \sum_{\lambda} f_{\alpha, \beta}^{(\lambda)}. \quad (13)$$

Darin stehen hinter dem Spurzeichen Summen verschiedener Produkte der Fermi-Operatoren $\overset{+}{a}_k, a_k$ und $\overset{+}{b}_j, b_j$.

Um die Struktur dieser Produkte übersetzen zu können, ist wieder die Verwendung von Graphen bequem.

Zu diesem Zweck führen wir die in Bild 2 dargestellten acht elementaren Graphen ein, die jedem der acht Summanden zugeordnet werden, aus denen die Faktoren in dem Produkt (12) bestehen.

Wir wollen Linien, die von einem Gitterpunkt aus nach oben und links verlaufen, immer ausgezogen zeichnen und ihnen Erzeugungsoperatoren zuordnen. Die

Linien, die vom Gitterpunkt aus nach unten und rechts verlaufen, zeichnen wir gestrichelt und ordnen ihnen Vernichtungsoperatoren zu. Ferner setzen wir zu jedem Erzeugungsoperator \hat{a}_k^+ den Faktor $2x$ und zu jedem Vernichtungsoperator \hat{b}_k^+ den Faktor $2y$.

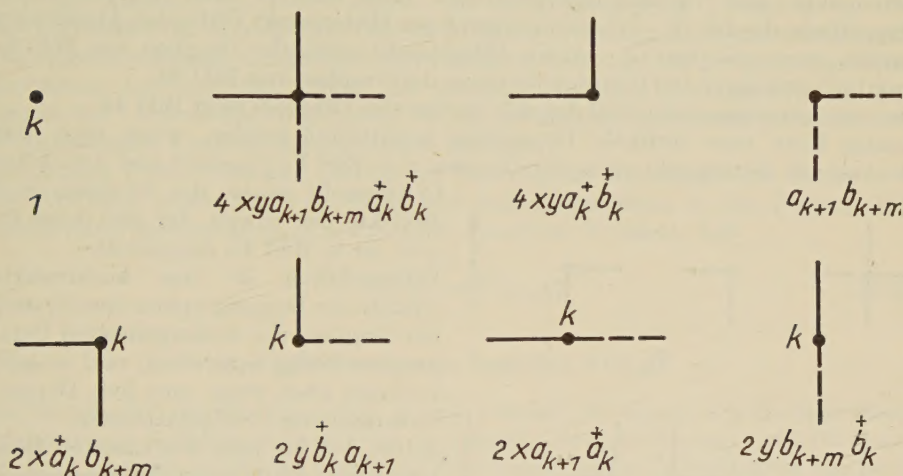


Bild 2

Wir ordnen jedem Gitterpunkt je irgendeinen der acht elementaren Graphen von Bild 2 zu.

Wir sprechen von einem „Doppelgraph“, wenn in ihm zwei beliebige benachbarte Gitterpunkte entweder überhaupt nicht miteinander verbunden oder wenn sie durch eine ausgezogene und eine gestrichelte Linie miteinander verbunden sind.

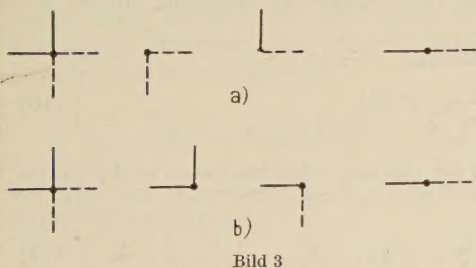


Bild 3

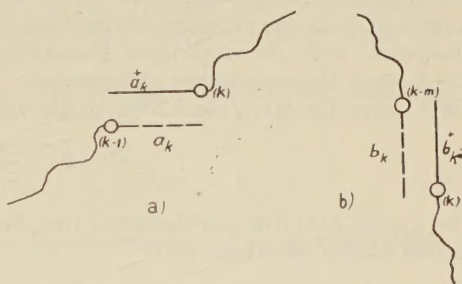


Bild 4

Wir heben hervor, daß wir überhaupt keine Graphen finden können, in denen einige der Doppellinien beide ausgezogen oder beide gestrichelt sind; denn aus Bild 2 ist zu ersehen, daß in den elementaren Graphen alle ausgezogenen Linien nach der entgegengesetzten Seite gerichtet sind wie die entsprechenden gestrichelten Linien.

Wir werden nun beweisen, daß alle Doppelgraphen geschlossen sind. Wie Bild 2 erkennen läßt, geht nämlich von jedem Gitterpunkt eine gerade Zahl von einfachen Linien aus. Diese Linien werden nur durch Linien verdoppelt, die von benach-

barten Gitterpunkten ausgehen. In den Doppelgraphen läuft also durch jeden Gitterpunkt eine gerade Zahl von Doppellinien, d. h., ein solcher Graph ist geschlossen.

Offensichtlich entspricht jedem Doppelgraph ein gewisses System von gepaarten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Zum Beispiel kann die horizontale Doppellinie, die den $(k - 1)$ -ten mit dem k -ten Gitterpunkt verbindet, konstruiert werden, wenn wir dem $(k - 1)$ -ten Gitterpunkt einen der Graphen von Bild 3a zuordnen und den k -ten Gitterpunkt einen der Graphen von Bild 3b.

Den uns interessierenden Teil des sich ergebenden Graphen zeigt Bild 4a.

Analog kann eine vertikale Doppellinie konstruiert werden, wenn man dem $(k - m)$ -ten Gitterpunkt einen der Graphen von Bild 5a zuordnet und dem k -ten

Gitterpunkt einen der Graphen von Bild 5b. Der Graph, der sich dabei ergibt, ist in Bild 4b dargestellt.

Offensichtlich ist das konstruierte System der Doppelgraphen dem System der Graphen des vorhergehenden Paragraphen völlig äquivalent, und es geht in dieses über, wenn man jede Doppellinie durch eine einfache ersetzt.

Außer den bis jetzt betrachteten Doppelgraphen wird es auch Graphen geben, in denen einige von zwei benachbarten Gitterpunkten durch eine einfache (ausgezogene oder gestrichelte) Linie miteinander verbunden sind.

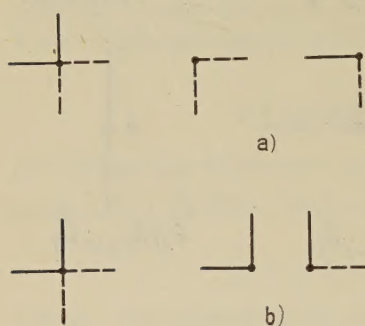


Bild 5

Augenscheinlich entsprechen solchen Graphen Produkte von Fermi-Operatoren, die nicht gepaarte Operatoren (Erzeugungs- oder Vernichtungsoperatoren) enthalten.

Setzt man solche Produkte aber in die Formel (13) hinter dem Spurzzeichen ein, so ergeben sie zu der Summe den Beitrag Null, und man braucht sie daher nicht zu beachten und nur diejenigen Produkte in der Summe zu belassen, denen geschlossene Doppelgraphen entsprechen.

Wir haben für $S(x, y)$ und $S^*(x, y)$ die Ausdrücke

$$S(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad (10)$$

wo $g_{\alpha\beta}$ die Zahl der geschlossenen Graphen ist, die aus α horizontalen und β vertikalen Linien bestehen, und

$$S^*(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} (2x)^\alpha (2y)^\beta \sum \text{Sp} \left(\overset{+}{a}_1 \dots a_\lambda \dots \overset{+}{b}_\mu \dots b_{\mu'} \dots \right), \quad (14)$$

wo hinter dem Spurzzeichen gepaarte Produkte von α Fermi-Operatoren $\overset{+}{a}_\lambda$ und β Fermi-Operatoren $\overset{+}{b}_\mu$ stehen.

Wegen der bewiesenen Äquivalenz der einfachen und der Doppelgraphen wird die Zahl der Glieder in der inneren Summe genau $g_{\alpha\beta}$.

Berücksichtigen wir, daß bei der Bildung der Spur von Produkten aus Fermi-Operatoren gilt

$$\text{Sp} \overset{+}{a}_\lambda a_\lambda = \text{Sp} a_\lambda \overset{+}{a}_\lambda = \frac{1}{2}, \quad (14a)$$

so erhalten wir nach Formel (14)

$$S^*(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta (\pm 1 \pm 1 \dots \pm 1), \quad (15)$$

wo in der Klammer $g_{\alpha\beta}$ Glieder stehen, von denen jedes gleich ± 1 ist.

Das Vorzeichen des betreffenden Gliedes ist dadurch bestimmt, ob man eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen ausführen muß, um von der ursprünglichen Anordnung der Fermi-Operatoren, die durch die Formel (12) bestimmt ist, zu der „gepaarten“ Anordnung zu kommen, bei der die Erzeugungsoperatoren neben den entsprechenden Vernichtungsoperatoren stehen.

Im Anhang I wird bewiesen, daß bei der Paarung der Operatoren das Vorzeichen des Produkts immer erhalten bleibt und daß infolgedessen in der Formel (15) überall das Plusvorzeichen zu nehmen ist. Damit ist bewiesen, daß

$$S(x, y) = S^*(x, y). \quad (15a)$$

§ 4. Berechnung der Funktion $S(x, y)$

Zur Berechnung der Funktion $S(x, y)$ nach Formel (12) müssen wir die Spur eines Produkts von N Faktoren berechnen, von denen jeder eine Summe von 8 Gliedern ist: Eins, eines Produkts von vier Fermi-Operatoren und sechs Produkten von zwei Fermi-Operatoren.

Im Anhang II wird eine Formel abgeleitet, nach der man bequem die Spur eines Produkts von Faktoren berechnen kann, die Fermi-Operatoren linear enthalten, d. h. von Produkten der Art

$$\prod_{i=1}^{i=N} \left[\sum_{(k)} (a_{ik} c_k^\dagger + b_{ik} c_k) \right]. \quad (16)$$

Wir könnten diese Formel benutzen, wenn es uns gelänge, jeden der Faktoren in (12) als Produkt von Faktoren darzustellen, die in bezug auf die in ihnen vorkommenden Fermi-Operatoren linear sind.

Um dieses Programm der „Linearisierung“ des Produkts in (12) durchzuführen, berechnen wir das Produkt

$$(A_k^{(1)} + 2x a_k^\dagger) (A_k^{(2)} + 2y b_k^\dagger) (A_k^{(3)} + a_{k+1}) (A_k^{(4)} + b_{k+m}), \quad (17)$$

wo $A_k^{(\lambda)}$ vier Operatoren sind, die mit den Operatoren $a_k^\dagger, a_k, b_k^\dagger, b_k$ antikommutieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & A_k^{(1)} A_k^{(2)} A_k^{(3)} A_k^{(4)} + 4xy a_k^\dagger b_k^\dagger a_{k+1} b_{k+m} + A_k^{(1)} A_k^{(2)} a_{k+1} b_{k+m} + \\ & + A_k^{(1)} A_k^{(3)} 2y b_{k+m} b_k^\dagger + A_k^{(1)} A_k^{(4)} 2y b_k^\dagger b_{k+1} + \\ & + A_k^{(2)} A_k^{(3)} 2x a_k^\dagger b_{k+m} + A_k^{(2)} A_k^{(4)} 2x a_{k+1} a_k^\dagger + 4A_k^{(3)} A_k^{(4)} xy a_k^\dagger b_k^\dagger. \end{aligned} \quad (18)$$

Wenn wir den vier Operatoren $A_k^{(\lambda)}$ die Bedingungen

$$\text{Sp} (A_k^{(1)} A_k^{(2)} A_k^{(3)} A_k^{(4)}) = 1; \quad \text{Sp} (A_k^{(\lambda)} A_k^{(\mu)}) = 1; \quad \lambda, \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (19)$$

auferlegen, so können wir $S(x, y)$ in der Form eines Produkts von $4N$ Faktoren darstellen

$$S(x, y) = \text{Sp} \prod_{k=1}^{k=N} (A_k^{(1)} + 2x a_k^+) (A_k^{(2)} + 2y b_k^+) (A_k^{(3)} + a_{k+1}) (A_k^{(4)} + b_{k+m}). \quad (20)$$

Die Bedingung (19) kann man erfüllen — wie leicht nachzuprüfen ist —, wenn man sechs weitere Paare von Fermi-Operatoren $c_k^{+(\lambda)}, c_k^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) einführt und setzt:

$$\begin{aligned} A_k^{(1)} &= \sqrt{2} (c_k^{(1)} + c_k^{(2)} + c_k^{(3)}) \\ A_k^{(2)} &= \sqrt{2} (c_k^{(1)} + c_k^{(4)} + c_k^{(5)}) \\ A_k^{(3)} &= \sqrt{2} (c_k^{(2)} + c_k^{(4)} + c_k^{(6)}) \\ A_k^{(4)} &= \sqrt{2} (c_k^{(3)} + c_k^{(5)} + c_k^{(6)}). \end{aligned} \quad (21)$$

Mit den Formeln (20) und (21) kann man die Spur des Produkts (13) als Spur eines Produkts von $4N$ -Faktoren darstellen, die in den Operatoren $a_k, b_k, c_k^{+(\lambda)}, c_k^{(\lambda)}$ linear sind. Nach Formel (12) von Anhang II kann das Quadrat dieser Spur als Determinante einer $4N$ -reihigen antisymmetrischen Matrix D geschrieben werden, deren Elemente durch den Doppelindex (k, λ) numeriert werden, wobei $k = 2, 1, \dots, N$ und $\lambda = 1, 2, 3, 4$ ist. Die Elemente der Matrix D sind:

$$\begin{aligned} (k, \lambda | D | k', \lambda') &= 1 \quad (\lambda' > \lambda) \quad (k, \lambda | D | k', \lambda') = -1 \quad \lambda' < \lambda \\ (k, 3 | D | k+1, 1) &= x \quad (k+1, 1 | D | k, 3) = -x \\ (k, 4 | D | k+m, 2) &= y \quad (k+m, 2 | D | k, 4) = -y. \end{aligned} \quad (22)$$

Die übrigen Matrixelemente sind gleich Null. Wir sehen, daß die Matrix D als eine Übermatrix dargestellt werden kann, deren Elemente vierreihige Matrizen sind:

$$D = \begin{pmatrix} U & X & 0 & \dots & Y & 0 & 0 \\ -X^T & U & X & \dots & 0 & Y & 0 \\ 0 & -X^T & U & X & \dots & 0 & 0 & Y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Darin ist nach den Formeln (22)

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Die Struktur der Matrix D zeigt, daß sie als Summe von direkten Produkten N -reihiger Matrizen E, E_1 und E_m jeweils mit den vierreihigen Matrizen U, X, Y geschrieben werden kann

$$D = E \times U + E_1 \times X + E_m \times Y - E_1^T \times X^T - E_m^T \times Y^T, \quad (25a)$$

wobei gilt:

$$(i | E | k) = \delta_{ik}; \quad (i | E_1 | k + 1) = \delta_{ik}; \quad (i | E_m | k + m) = \delta_{ik}. \quad (25b)$$

Nach Anhang II (12) ist

$$S^2(x, y) = \text{Det } D. \quad (26)$$

Bei der Berechnung der Determinante der Matrix D können wir sie einer Ähnlichkeitstransformation unterwerfen, die Formeln von Anhang III verwenden

$$D' = (S \times E) D (S^{-1} \times E) = E \times U + E'_1 \times X + E'_m Y - E_1^T X^T - E_m^T Y^T \quad (27)$$

und die Matrix S so wählen, daß E_1 und E_m Diagonalmatrizen werden.

Wenn wir bedenken, daß $N = m \cdot n$ eine große Zahl ist, so können wir den Elementen der Matrix D die Periodizitätsbedingung

$$(N + k, \lambda | D | N + k', \lambda') = (k, \lambda | D | k', \lambda') \quad (28)$$

auferlegen. Dann gilt

$$\begin{aligned} E_m &= (E_1)^m; \quad E = (E_1)^N; \quad (E_1)^{N-1} = E_1^{-1} = E_1^T \\ (E_1)^{N-m} &= E_1^{-m} = E_m^T. \end{aligned} \quad (29)$$

Hieraus folgt, daß die Eigenwerte der Matrizen E_1 und E_m Wurzeln N -ten Grades aus Eins sein werden:

$$(p | E'_1 | p) = \exp \left(\frac{2\pi i}{N} p \right) = \alpha_p; \quad (p | E'_m | p) = \exp \left(\frac{2\pi i}{N} m p \right) = \beta_p. \quad (30)$$

Die Matrix D' schreibt sich in Form einer Stufenmatrix

$$D' = \begin{pmatrix} U_1 & & \\ & U_2 & \\ & & \ddots \\ & & & U_p \end{pmatrix}, \quad (31)$$

wo nach (27) und (30) gilt

$$U_p = U + \alpha_p X + \beta_p Y - \alpha_p^* X^T - \beta_p^* Y^T \quad (32)$$

oder nach den Formeln (24)

$$U_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 + \alpha_p x & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 + \beta_p y \\ -1 - \alpha_p^* x & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 - \beta_p^* y & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Berechnen wir die Determinante, so erhalten wir

$$\text{Det } U_p = (1 + x^2) (1 + y^2) - 2 y (1 - x^2) \cos \frac{2\pi}{N} p - 2 x (1 - y^2) \cos \frac{2\pi}{N} m p.$$

Wir führen die Bezeichnungen ein

$$p = p_2 n + p_1 \quad 1 \leq p_1 \leq n; \quad 0 \leq p_2 \leq m-1 \quad (34)$$

$$\cos \frac{2\pi}{N} p = \cos \frac{2\pi}{m} \left(p_2 + \frac{p_1}{n} \right); \quad \cos \frac{2\pi}{N} m p = \cos \frac{2\pi}{n} p_1$$

und schreiben den abschließenden Ausdruck $S^2(x, y)$ in Form eines zweifachen Produkts:

$$(S(x, y))^2 = \prod_{p_1=1}^{p_1=n} \prod_{p_2=0}^{p_2=m-1} \left[(1+x^2)(1+y^2) - 2x(1-y^2) \cos \frac{2\pi}{n} p_1 - \right. \\ \left. - 2y(1-x^2) \cos \frac{2\pi}{m} \left(p_2 + \frac{p_1}{n} \right) \right]. \quad (35)$$

Durch Logarithmieren erhalten wir hieraus:

$$\ln S(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{p_1=1}^{p_1=n} \sum_{p_2=0}^{p_2=m-1} \ln \left[(1+x^2)(1+y^2) - 2x(1-y^2) \cos \frac{2\pi}{n} p_1 - \right. \\ \left. - 2y(1-x^2) \cos \frac{2\pi}{m} \left(p_2 + \frac{p_1}{n} \right) \right]. \quad (36)$$

Bei großen n, m geht diese Summe in ein Integral über:

$$\ln S(x, y) = \frac{N}{2(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln [(1+x^2)(1+y^2) - 2x(1-y^2) \cos \omega_1 - \\ - 2y(1-x^2) \cos \omega_2] d\omega_1 d\omega_2. \quad (37)$$

§ 5. Die freie Energie; der Phasenübergang

Da wir einen Ausdruck für $\ln S(x, y)$ haben, können wir unter Verwendung von Formel (9) den Ausdruck für die freie Energie ($F(x, y)$) in der Form schreiben:

$$-\frac{F(x, y)}{TN} = \frac{1}{N} \ln Z(x, y) = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln [(1-x^2)(1-y^2)] + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln [(1+x^2)(1+y^2) - 2x(1-y^2) \cos \omega_1 - \\ - 2y(1-x^2) \cos \omega_2] d\omega_1 d\omega_2. \quad (38)$$

Setzen wir $x = \text{th } \theta_1$ und $y = \text{th } \theta_2$ ein, so erhalten wir

$$-\frac{F(x, y)}{TN} = \ln 2 + \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln [\cos 2\theta_1 \text{ch } 2\theta_2 - \text{sh } 2\theta_1 \cos \omega_1 - \\ - \text{sh } 2\theta_2 \cos \omega_2] d\omega_1 d\omega_2. \quad (39)$$

Dieser Ausdruck wurde in der ursprünglichen Arbeit von ONSAGER [1] abgeleitet.

Wir wollen nun beweisen, daß der Ausdruck, der in (38) hinter dem Logarithmuszeichen auftritt, nicht negativ ist.

Es ist

$$\begin{aligned} & [(1-x^2)(1-y^2) - 4xy]^2 = \\ & = (1-x^2)^2(1-y^2)^2 + 16x^2y^2 - 8xy(1-x^2)(1-y^2) \geq 0 \end{aligned} \quad (40)$$

oder

$$(1+x^4-2x^2)(1+y^4-2y^2) \geq 8xy(1-x^2)(1-y^2) - 16x^2y^2.$$

Addieren wir auf beiden Seiten der Ungleichung den positiven Ausdruck

$$4x^2(1+y^4) + 4y^2(1+x^4) = 4x^2(1-y^2)^2 + 4y^2(1-x^2)^2 + 16x^2y^2,$$

so erhalten wir

$$(1+x^4+2x^2)(1+y^4+2y^2) \geq (2x(1-y^2) + 2y(1-x^2))^2.$$

Hieraus folgt

$$A(x, y) = (1+x^2)(1+y^2) - 2x(1-y^2) - 2y(1-x^2) \geq 0. \quad (41)$$

Dabei wird das Gleichheitszeichen bei den Werten $x = x_c$ und $y = y_c$ erreicht, für die gilt

$$(1-x_c^2)(1-y_c^2) - 4x_c y_c = 0. \quad (42)$$

Verwenden wir (41), so können wir die freie Energie in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} -\frac{F(x, y)}{TN} &= R(x, y) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln [A(x_1 y) + 2x(1-y^2)(1-\cos \omega_1) + \\ &+ 2y(1-x^2)(1-\cos \omega_2)] d\omega_1 d\omega_2, \end{aligned} \quad (43)$$

wo $R(x, y)$ eine für $x = x_c$, $y = y_c$ reguläre Funktion ist.

Wir sehen: Eine besondere Eigenschaft der freien Energie hängt damit zusammen, daß der Ausdruck unter dem Logarithmus Null wird für $\omega_1 = \omega_2 = 0$ und bei der Temperatur T_c , die durch die Formel

$$\operatorname{th} \frac{J_1}{kT_c} = x_c; \quad \operatorname{th} \frac{J_2}{kT_c} = y_c \quad (44)$$

bestimmt ist, wo x_c , y_c die Beziehung (42) erfüllen.

Da der Ausdruck

$$A(x, y) + 2x(1-y^2)(1-\cos \omega_1) + 2y(1-x^2)(1-\cos \omega_2)$$

für die Werte $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $x = x_c$, $y = y_c$ ein Minimum hat und Null wird, können wir ihn in eine Reihe entwickeln und erhalten:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right)_c (\Delta x)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \right)_c \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right] + x_c (1 - y_c^2) \omega_1^2 + y_c (1 - x_c^2) \omega_2^2. \quad (45)$$

Beachten wir, daß nach (44)

$$\Delta x = -(1 - x_c^2) \frac{J_1}{T_c^2} \Delta T; \quad \Delta y = -(1 - y_c^2) \frac{J_2}{T_c^2} \Delta T$$

ist, so erhalten wir für die freie Energie in der Umgebung des singulären Punktes

$$-\frac{F(T)}{TN} = R(x_c, y_c) + \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln [C(T_c) (T - T_c)^2 + x_c (1 - y_c^2) \omega_1^2 + y_c (1 - x_c^2) \omega_2^2] d\omega_1 d\omega_2, \quad (46)$$

wo

$$C(T_c) = \frac{1}{2T_c^2} \left[J_1^2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right)_c (1 - x_c^2)^2 + 2J_1 J_2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \right)_c (1 - x_c^2) (1 - y_c^2) + J_2^2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right)_c (1 - y_c^2)^2 \right]. \quad (47)$$

Integrieren wir (46), so erhalten wir für die freie Energie den Ausdruck

$$-\frac{F}{TN} = R_1(T_c) + C_1(T_c)(T - T_c)^2 \ln (T - T_c)^2. \quad (48)$$

Für die innere Energie U erhalten wir nach der Formel

$$\frac{U}{N} = - \frac{d}{dT} \left(\frac{F}{NT} \right) = R_2(T_c) + C_2(T_c) (T - T_c) \ln (T - T_c)^2 \quad (49)$$

und bemerken, daß sie im Punkt $T = T_c$ stetig bleibt. Die Wärmekapazität erleidet aber einen logarithmischen Sprung

$$\frac{C}{N} = \frac{d}{dt} \left(\frac{U}{N} \right) = R_3(T_c) + C_3(T_c) \ln (T - T_c)^2. \quad (50)$$

Schluß

Zum Schluß bemerken wir, daß die geschilderte Methodik nicht unmittelbar auf den Fall eines dreidimensionalen Gitters verallgemeinert werden kann. Wir numerieren die entsprechenden Formeln für das dreidimensionale Gitter mit den gleichen Zahlen wie im zweidimensionalen Fall und versehen sie mit einem Stern.

Wir geben jedem Gitterpunkt die Nummer

$$\begin{aligned} k &= (k_3 - 1) m n + (k_2 - 1) m + k_1 & 1 \leq k_1 \leq m \\ & & 1 \leq k_2 \leq n \\ N &= m n p & 1 \leq k_3 \leq p. \end{aligned} \quad (1^*)$$

Wir kommen leicht zu den Formeln

$$Z(x, y, z) = 2^N [(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)]^{-N/2} S(x, y, z), \quad (9^*)$$

$$S(x, y, z) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} g_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma. \quad (10^*)$$

Darin ist $g_{\alpha\beta\gamma}$ die Zahl der geschlossenen räumlichen Graphen mit α, β, γ Linien in drei aufeinander senkrechten Richtungen.

Weiter kann man analog zu (12) Fermi-Operatoren einführen, die drei aufeinander senkrechten Richtungen in dem Gitter $\overset{+}{a}_k, a_k, \overset{+}{b}_k, b_k, \overset{+}{c}_k, c_k$ entsprechen. Die elementaren Graphen analog denen von Bild 2 können auch leicht konstruiert werden. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß es im räumlichen Falle 32 elementare Graphen gibt. Für die Größe S^* kann eine Graphenmethode entwickelt werden, wobei sich leicht die Formel

$$S^*(x, y, z) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma (\pm 1 \pm 1 \pm 1 \dots \pm 1) \quad (15^*)$$

ergibt; dabei stehen in der Klammer $g_{\alpha\beta\gamma}$ Glieder.

Zum Unterschied von dem ebenen Fall kann man aber hier nicht beweisen, daß alle Summanden in (15*) positiv sind. Außerdem gibt es ein einfaches Beispiel, das zeigt, daß dies nicht der Fall ist. Hierzu dient der Graph von Bild 8

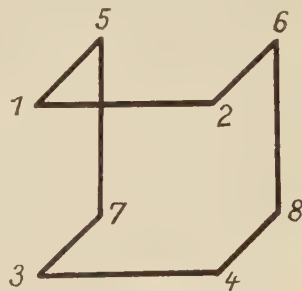


Bild 6

$$a_2 c_5 c_6 \overset{+}{a}_2 a_4 c_7 c_8 \overset{+}{a}_4 b_7 \overset{+}{c}_5 b_8 \overset{+}{c}_6 \overset{+}{b}_7 \overset{+}{c}_7 b_8 \overset{+}{c}_8. \quad (*)$$

Führen wir die Paarbildung so durch, wie es (*) angibt, so erhalten wir, daß der Graph von Bild 6 einen negativen Beitrag zu der Zustandssumme beisteuert. Diese Tatsache hängt nicht von der Reihenfolge der Operatoren in den Eckpunkten ab, da ein Eckpunkt jedes Typs in dem betrachteten Graphen zweimal vorkommt.

Anhang I

Wir wollen beweisen, daß bei der angenommenen Ordnung der Operatoren in (12) alle Graphen einen nicht negativen Beitrag zur statistischen Summe beitragen.

Um von einem beliebigen Glied der Summe in (14) zu den Graphen übergehen zu können, muß man die Fermi-Operatoren so umstellen, daß wir von der lexikographischen Anordnung, die in (12) angenommen wurde, zu einer Ordnung kommen, wo jeder Erzeugungsoperator neben dem entsprechenden Vernichtungsoperator steht. Wir bemerken, daß die Anordnung, in der die entsprechenden

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren hintereinander stehen, wegen der geltenden Beziehung

$$\text{Sp } \hat{a}_k^+ a_k = \text{Sp } a_k^+ \hat{a}_k$$

unwesentlich ist.

Es genügt, den Beweis für zusammenhängende Graphen zu führen, da ein nicht-zusammenhängender Graph gleich dem Produkt der zu ihm gehörenden zusammenhängenden Teile ist. Der Beweis wird durch Induktion geführt.

Hierzu überzeugen wir uns davon, daß der einfachste Graph, den Bild 1 b zeigt, das Pluszeichen hat. Diesem Graphen entsprechen die Operatoren

$$a_{k+1} b_{k+m} b_{k+m+1}^+ \hat{a}_{k+1}^+ a_{k+m+1} \\ b_{k+m}^+ \hat{a}_{k+m+1}^+ \hat{b}_{k+m+1}^+$$

Führen wir die Umstellung in der gewöhnlichen Weise aus, so können wir uns davon überzeugen, daß der Graph das Vorzeichen plus hat.

Wir betrachten zuerst einen beliebigen zusammenhängenden Graphen, der sich nicht selbst schneidet. Offensichtlich kann ein beliebiger derartiger Graph aus einem elementaren durch aufeinanderfolgende Anwendung einer der Operationen von Bild 7 konstruiert werden.

Es genügt nachzuweisen, daß eine jede derartige Operation das Vorzeichen des Graphen nicht ändert. Da der elementare Graph in (15) einen positiven Beitrag liefert, zeigen wir damit, daß alle Graphen, die sich nicht selbst schneiden,

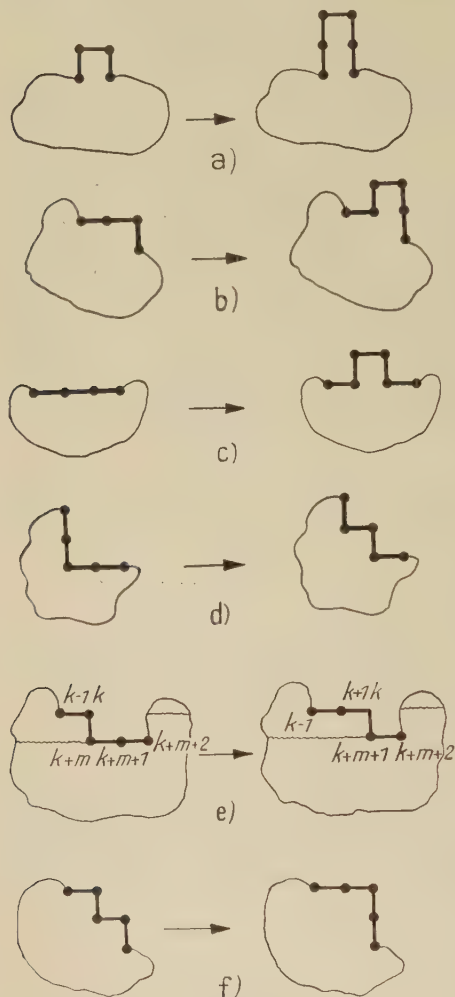


Bild 7

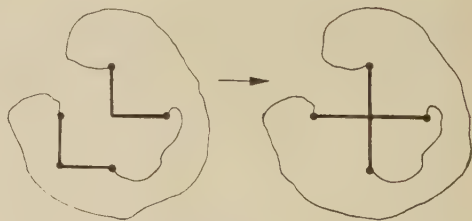


Bild 8

einen positiven Beitrag liefern. Der Beweis wird für alle Operationen von Bild 7 analog geführt. Daher betrachten wir hier irgendein Beispiel, etwa 7e.

Wir schreiben die Operatoren heraus, die dem linken Graph von 7e entsprechen.

$$\alpha \hat{a}_k^+ \underbrace{b_{k+m} \beta \hat{b}_{k+m}^+}_{\text{}} a_{k+m+1} \underbrace{a_{k+m+2}^+ \hat{a}_{k+m+1}^+}_{\text{}} \gamma. \quad (1)$$

Darin bedeutet α die Gesamtheit der Fermi-Operatoren, die zu den Gitterpunkten gehören, die dem k -ten vorangehen, β diejenigen, die zu den Gitterpunkten zwischen dem k -ten und dem $(k+m)$ -ten gehören (in Bild 7e ist die betreffende Stelle des Graphen durch eine Wellenlinie bezeichnet), und γ die zu Gitterpunkten, die auf den $(k+m+1)$ -ten folgen.

Nach Hinzufügen des elementaren Rechtecks geht der linke Graph von Bild 7e in den rechten über. Wir schreiben die entsprechenden Operatoren heraus

$$\alpha \underbrace{a_{k+1}^+ a_k^+}_{+1} \underbrace{b_{k+m+1}^+}_{+1} \beta \underbrace{b_{k+m+1}^+}_{+1} a_{k+m+2} \gamma. \quad (2)$$

Paaren wir in (2) die Operatoren b_{k+m} , b_{k+m}^+ sowie a_{k+m+1} , a_{k+m+1}^+ , so erhalten wir

$$\text{sign (1)} = - \text{sign } \alpha a_k^+ \beta a_{k+m+1}^+ \gamma. \quad (2a)$$

Nach demselben Verfahren überzeugen wir uns, daß

$$\text{sign (2)} = - \text{sign } \alpha a_k^+ \beta a_{k+m+1}^+ \gamma. \quad (2b)$$

Somit erhalten wir

$$\text{sign (1)} = \text{sign (2)}, \quad (2c)$$

und die Graphen von Bild 7e haben das gleiche Vorzeichen.

Auf dieselbe Weise wird der Beweis in allen anderen Fällen geführt.

Um den Beweis für die Graphen zu führen, die sich selbst schneiden, müssen wir in die Zahl der auszuführenden Operationen auch Operationen vom Typ des Bildes 8 einbeziehen. Dabei wird der Beweis genau analog dem vorhergehenden Fall geführt.

Anhang II

Es mögen 2τ -Formen gegeben sein, die in den Fermi-Operatoren c_k , c_k^+ linear sind,

$$L_i = \sum_{k=1}^{k=N} (a_{ik} c_k^+ + b_{ik} c_k). \quad (3)$$

Wir leiten eine Formel zur Berechnung der Spur eines Produkts von derartigen linearen Formen ab

$$S_{2\tau} = S_p (L_1 L_2 \dots L_{2\tau}). \quad (4)$$

Aus der Definition (3) folgt:

$$\begin{aligned} [L_j L_i]_+ &= L_j L_i + L_i L_j = \sum_{k,k'} (a_{jk} b_{ik'} [c_k^+ c_{k'}] + b_{jk} a_{ik'} [c_k c_{k'}]) = \\ &= \sum_k (a_{jk} b_{ik} + a_{ik} b_{jk}). \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Sp } L_j L_i = \frac{1}{2} \sum_k (a_{jk} b_{ik} + a_{ik} b_{jk}) = \frac{1}{2} [L_j L_i]_+.$$

Pfaffschen Ausdrucks und der Determinante her, die der antisymmetrischen Matrix

$$(S_{2\tau})^2 = \begin{pmatrix} 0 & \text{Sp}(L_1 L_2) & \text{Sp}(L_1 L_3) & \dots & \text{Sp}(L_1 L_{2\tau}) \\ -\text{Sp}(L_1 L_2) & 0 & \text{Sp}(L_2 L_3) & \dots & \text{Sp}(L_2 L_{2\tau}) \\ -\text{Sp}(L_1 L_3) & -\text{Sp}(L_2 L_3) & 0 & \dots & \text{Sp}(L_3 L_{2\tau}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\text{Sp}(L_1 L_{2\tau}) & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

entspricht.

Dadurch ist die Berechnung der Spur nach Formel (4) nach den Formeln (5) und (12) auf die Berechnung einer Determinante zurückgeführt.

Anhang III

Das direkte Produkt einer n -reihigen Matrix A mit der m -reihigen Matrix B ist die $n \cdot m$ -reihige Matrix:

$$A \times B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}B & A_{n2}B & \dots & A_{nn}B \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Offensichtlich gilt $A \times B \neq B \times A$.

Aus der Definition folgen die Formeln für die Produkte:

$$\begin{aligned} (A \times B)(D \times D) &= AC \times BC \\ (A \times B)(C \times D)(F \times G) &= ACF \times BDG. \end{aligned} \quad (14)$$

Das direkte Produkt kann man einer Ähnlichkeitstransformation unterwerfen

$$(S_1 \times S_2)(A \times B)(S_1^{-1} \times S_2^{-1}) = S_1 A S_1^{-1} \times S_2 B S_2^{-1}. \quad (15)$$

In dem Spezialfall $S_1 = E$ erhalten wir die Formel

$$(E \times S_2)(A \times B)(E \times S_2^{-1}) = A \times S_2 B S_2^{-1}, \quad (16)$$

die im Text angeführt ist.

Übersetzt von F. BARTELS
Deutsche Red. durch D. FRANK

Literatur

- [1] L. ONSAGER, Phys. Rev. **65**, 117 (1944).
- [2] B. KAUFMAN, Phys. Rev. **76**, 1232 (1949).
- [3] J. B. RUMER, Uspechi fiz. Nauk **53**, 245 (1954).
- [4] C. A. HURST and H. S. GREEN, J. Chem. Phys. **33**, 1059 (1960).
- [5] E. R. CAIANIELLO, Suppl. Nuovo Cimento **14**, 177 (1959).

Stoßwellen in der Magnetohydrodynamik¹⁾

R. V. POLOVIN

Inhalt

§ 1 Einführung	526
§ 2 Einfache Wellen	526
§ 3 Stoßwellen. Zemplenscher Satz	528
§ 4 Bedingungen für die Entwicklung der Sprünge	529
§ 5 Konsequenzen der Evolutionsbedingungen	533
§ 6 Die Stoßadiabate	535
§ 7 Das Kolbenproblem	538
§ 8 Zerfall eines Sprunges	543

§ 1 Einführung

In den letzten Jahren hat sich der Anwendungsbereich der Magnetohydrodynamik stark erweitert. Man findet sie heute in der Theorie der mit flüssigen Metallen gekühlten Kernreaktoren [1], der Theorie der magnetohydrodynamischen Meßgeräte [2], der Sonnenphysik [3], der Geophysik und Astrophysik [4], der Theorie der Gasentladungen und des Plasmas [5—7], der Theorie der gesteuerten thermonuklearen Reaktionen [8] und der Magnetoaerodynamik [9, 10].

Die Gleichungen der Magnetohydrodynamik sind nichtlinear. Das führt zum Auftreten einer Reihe spezifischer Effekte, insbesondere zur Bildung von Stoßwellen. Diese Stoßwellen spielen eine wesentliche Rolle bei der Kompression und Aufheizung eines Plasmas [11—13]. Sie stellen einen der Mechanismen zur Bildung interstellarer Magnetfelder dar [14]. Ohne Stoßwellen wäre es unmöglich, die Überschallumströmung eines Körpers im Magnetfeld zu behandeln [15, 16]. Magnetohydrodynamische Stoßwellen sind auch wesentlich in der Theorie der Impulsentladungen im Plasma [17].

Im vorliegenden Artikel wird, bei HOFFMAN und TELLER [18] beginnend, ein Überblick über eine Reihe theoretischer Arbeiten gegeben, die den magnetohydrodynamischen Stoßwellen gewidmet sind.

§ 2 Einfache Wellen

Eine wichtige Klasse nichtlinearer Lösungen der magnetohydrodynamischen Grundgleichungen bilden die einfachen Wellen. Als einfache Wellen bezeichnet man solche Lösungen, in denen alle magnetohydrodynamischen Größen, so die

¹⁾ Uspechi fiz. Nauk **72**, 33 (1960).

Dichte ϱ , der Druck p , die Entropie s , die Materiegeschwindigkeit \mathbf{v} und das Magnetfeld \mathbf{H} , als Funktionen einer einzigen (z. B. ϱ , das selbst nur von der Koordinate x und der Zeit t abhängt) auftreten. Wir beschränken uns auf den Fall ebener eindimensionaler einfacher Wellen. Die besondere Rolle, die einfache Wellen in der Magnetohydrodynamik spielen, besteht darin, daß beim Fehlen eines Sprunges nur sie an das Gebiet einer Gleichströmung angrenzen können [19, 20]¹⁾. Eine spezielle Art von einfachen Wellen sind die Automodellwellen, d. h. Wellen, bei denen die magnetohydrodynamischen Größen nur vom Verhältnis x/t abhängen. Automodellwellen entstehen immer dann, wenn die Anfangsbedingungen von Parametern frei sind, die die Dimension einer Länge haben.

In der Magnetohydrodynamik gibt es drei Arten von einfachen Wellen [19, 20]:

1. Alfvénsche Wellen

$$\mathbf{v} = -\frac{\varepsilon \mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\varrho}}, \quad v_t \equiv \sqrt{v_y^2 + v_z^2} = \text{const}, \quad (2.1)$$

$$H_t \equiv \sqrt{H_y^2 + H_z^2} = \text{const}, \quad \varrho = \text{const}, \quad s = \text{const}, \quad H_x = \text{const}.$$

Es gilt $\varepsilon = +1$ für Wellen, die sich in positiver x -Richtung ausbreiten, $\varepsilon = -1$ für Wellen, die sich in entgegengesetzter Richtung ausbreiten.

2. Magnetoakustische Wellen

$$\frac{dv_x}{d\varrho} = \varepsilon \frac{U_{\pm}}{\varrho}, \quad \frac{dv_t}{d\varrho} = -\varepsilon \frac{H_x \mathbf{H}_t U_{\pm}}{4\pi\varrho^2(U_{\pm}^2 - U_x^2)}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial \varrho} = \frac{U_{\pm}^2 \mathbf{H}_t}{\varrho(U_{\pm}^2 - U_x^2)}, \quad \frac{dp}{d\varrho} = c^2, \quad s = \text{const}, \quad H_x = \text{const}.$$

Dabei ist U_x die Alfvén-Geschwindigkeit, die bestimmt wird durch

$$U = \frac{H}{\sqrt{4\pi\varrho}};$$

v_t und H_t sind die Transversalkomponenten der Geschwindigkeit und des Magnetfeldes, c ist die Schallgeschwindigkeit und

$$U_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2}[U^2 + c^2 \pm \sqrt{(U^2 + c^2)^2 - 4c^2 U_x^2}]};$$

die Zeichen Plus bzw. Minus bei der Größe U_{\pm} entsprechen einer schnellen bzw. langsamen magnetoakustischen Welle.

3. Entropie-Wellen

$$d\varrho = (\partial\varrho/\partial s)_p ds, \quad p = \text{const}, \quad \mathbf{v} = \text{const}, \quad \mathbf{H} = \text{const}. \quad (2.3)$$

¹⁾ Die Behauptung von MUGIBAJASI [21], er habe eine Lösung gefunden, die keine einfache Welle ist, aber an das Gebiet einer Gleichströmung angrenzt, ist fehlerhaft. Damit die Bewegung des Mediums sich so verhält, wie sie MUGIBAJASI angibt, muß man an den Rand einen veränderlichen (und nicht einen konstanten) äußeren Druck anlegen, der sich nach einem speziell vorgegebenen Gesetz ändert. Das wurde z. B. in einer Arbeit von A. G. KULIKOVSKIJ [22] festgestellt.

Bei der einfachen Alfvénschen Welle sind die Größen p , ϱ , v_x , \mathbf{v} , \mathbf{H} nicht veränderlich, und die Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{H} drehen sich um die x -Achse um jeweils gleiche Winkel. Die Phasengeschwindigkeit bei der Ausbreitung Alfvénscher Wellen ist gleich $v_x + \varepsilon U_x$. Da sich die letzte Größe nicht ändert, breitet sich die einfache Alfvénsche Welle ohne Veränderung ihrer Form aus. Daraus geht im besonderen hervor, daß die Alfvénschen Wellen keine Automodellwellen sein können. Die Phasengeschwindigkeit bei der Ausbreitung von magnetoakustischen Wellen ist gleich $v_x + \varepsilon U_{\pm}$. Wenn, wie gewöhnlich, die adiabatische Kompressibilität mit wachsendem Druck fällt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)_s \left(\frac{1}{\varrho}\right) > 0,$$

so folgt aus den Differentialgleichungen (2.2)

$$\frac{d}{d\varrho} (v_x + \varepsilon U_{\pm}) > 0. \quad (2.4)$$

Die Ungleichung (2.4) bedeutet, daß bei einer Bewegung der magnetoakustischen Welle ihr Profil verzerrt wird. Die Steilheit der Welle wird in Dilatationsbereichen ($d\varrho/dt < 0$) geringer, und in Kompressionsbereichen ($d\varrho/dt > 0$) wird sie größer. Das führt schließlich zur Bildung von Sprüngen (Stoßwellen) in den Kompressionsbereichen¹⁾ [26–29]. Die Lösungen der Gleichungen für einfache magnetoakustische Wellen haben eine sehr komplizierte Gestalt²⁾. Wir wollen uns nur mit einigen qualitativen Schlußfolgerungen beschäftigen, die unmittelbar aus den Differentialgleichungen ersichtlich sind. Vor allem stellen wir fest, daß der Druck sich im gleichen Sinne ändert wie die Dichte; das transversale Magnetfeld \mathbf{H}_t ändert sich in einer schnellen magnetoakustischen Welle im gleichen Sinne und in einer langsamen im entgegengesetzten Sinne. Einfache magnetoakustische Wellen sind eben; wenn zu Beginn $v_z = 0$ und $H_z = 0$ ist, so werden diese Verhältnisse beibehalten. Wenn sich eine Automodellwelle nach rechts ausbreitet ($\varepsilon = +1$), und wenn die Größen H_x und H_y gleiches Vorzeichen haben, so wird die Longitudinalgeschwindigkeit v_x kleiner. Die Transversalgeschwindigkeit v_y wächst in einer schnellen Automodellwelle an; in einer langsamen nimmt sie ab.

§ 3 Stoßwellen. Zemplenscher Satz

Wie wir gesehen haben, werden Sprünge im Kompressionsgebiet einfacher Wellen infolge Verzerrung des Profils gebildet. An der Sprungfläche gelten dann die Gesetze der Erhaltung der Masse, des Impulses und der Energie. Außerdem bleibt auch die Transversalkomponente des elektrischen und die Normalkomponente des magnetischen Feldes erhalten [18, 30, 31]. Wir beschränken uns auf eine Betrachtung von Sprüngen konstanter Amplitude.

¹⁾ Für den Fall, daß das Magnetfeld senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle steht, wurden analoge Resultate von S. A. KAPLAN und K. P. STANJUKOVIĆ [23], SEGREG [24] und TANIUTI [25] gefunden.

²⁾ Wie FRIEDRICHS (s. [29]) zeigte, sind die Gleichungen für einfache Wellen durch reine Quadraturen zu lösen.

Eine Klassifizierung aller möglichen Typen von magnetohydrodynamischen Sprüngen wurde von S. I. SYROVATSKIJ durchgeführt [32, 33].

Wie bekannt ist [34, 35], gilt in der gewöhnlichen Hydrodynamik bei Erfüllung der Bedingungen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)_s \left(\frac{1}{\varrho}\right) > 0, \quad \left(\frac{ds}{\partial p}\right)_e > 0 \quad (3.1)$$

der Zemplensche Satz, auf Grund dessen sich in der Stoßwelle der Druck und die Dichte vergrößern: $p_2 > p_1$, $\varrho_2 > \varrho_1$, mit anderen Worten: Stoßwellen sind immer Kompressionswellen.¹⁾

L. D. LANDAU und E. M. LIFŠIC [30] haben nachgewiesen, daß auch in der Magnetohydrodynamik bei Erfüllung der Bedingungen (3.1) Stoßwellen mit kleiner Amplitude bei willkürlicher Richtung des Magnetfeldes Kompressionswellen sind. Eine Behauptung, die der Umkehrung des Zemplenschen Satzes entspricht und darin besteht, daß in einem idealen Gas in der Kompressions-Stoßwelle die Entropie anwächst, wurde von HOFMAN und TELLER bewiesen [18].

Der Zemplensche Satz selbst wurde von HOFMAN und TELLER nur für senkrechte Stoßwellen mit kleiner Amplitude bewiesen; er ist aber bei willkürlicher Intensität der Welle und bei willkürlicher Richtung des Magnetfeldes [36–38] gültig.

§ 4 Bedingungen für die Entwicklung der Sprünge

Die Angabe der Grenzbedingungen auf dem Sprung reicht nicht aus, um eindeutig die Sprunglösung zu bestimmen. Dieser Schwierigkeit begegnet man auch in der gewöhnlichen Hydrodynamik. So sind z. B. beim Herausziehen eines Kolbens aus einem Rohr formal Wellen möglich, die zwei Lösungen entsprechen: 1. der Automodellverdünnungswelle, 2. der Verdünnungsstoßwelle [39]. Die zweite Lösung wird in der Hydrodynamik abgelehnt, weil sie dem Zemplenschen Satz widerspricht. In der Magnetohydrodynamik sind Verdünnungsstoßwellen, wie schon weiter oben bemerkt wurde, ebenfalls unmöglich.

Es gibt jedoch in der Magnetohydrodynamik eine große Anzahl von Kompressionsstoßwellen, und für das Problem, die Bewegung des Mediums bei vorgegebenen Anfangs- und Grenzbedingungen zu beschreiben, existieren unzählige Lösungen. Wenn man z. B. einen ideal leitenden Kolben in ein ruhendes magnetohydrodynamisches Medium hineinbewegt, in dem das Magnetfeld H_x die Richtung der Kolbennormale hat, so sind in diesem Falle, wenn man die folgenden Ungleichungen aufstellt

$$\frac{3(U_{0x}^2 - c_0^2)}{4U_{0x}} < u < \frac{3(U_{0x}^2 - c_0^2)}{\sqrt{4U_{0x}^2 - 3c_0^2}}, \quad U_{0x} > c_0$$

($U_{0x} = H_{0x}/\sqrt{4\pi\varrho_0}$; c_0 : Schallgeschwindigkeit; der Index Null kennzeichnet das ungestörte Medium; u : Geschwindigkeit des Kolbens; $\gamma = 5/3$) zwei Typen von Lösungen möglich:

1. die gleiche Kompressionsstoßwelle wie beim Fehlen des Magnetfeldes.

¹⁾ ZEMPLEN, C. R. Acad. Sci. (Paris) **141**, 712 (1905); **142**, 142 (1906). (Dt. Übers.)

2. zwei magnetohydrodynamische Stoßwellen, die sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen. Diese Geschwindigkeit hat die Größe

$$D = \frac{2u}{3} + \sqrt{\frac{4u^2}{9} + c_0^2},$$

wobei das transversale Magnetfeld H_{1t} zwischen diesen Wellen bestimmt wird durch die Formel

$$H_{1t} = \sqrt{\frac{8\pi\varrho_0 (D^2 - U_{0x}^2) (4U_{0x}^2 - D^2 - 3c_0^2)}{3U_{0x}^2}}.$$

Beide Stoßwellen sind Kompressionswellen. Die Dichte des Mediums zwischen diesen Wellen ist gleich

$$\varrho_1 = \frac{D^2 \varrho_0}{U_{0x}^2} > \varrho_0,$$

die Dichte des Mediums hinter den beiden Wellen ist gleich

$$\varrho_2 = \frac{U_{0x}^2 \varrho_1}{D(D - u)} > \varrho_1.$$

Die Entropie wächst in beiden Stoßwellen an.

So sehen wir, daß die Entropiebedingung, mit deren Hilfe es gelang, in der gewöhnlichen Hydrodynamik „überflüssige“ Sprünge auszuschließen, sich in der Magnetohydrodynamik als viel zu schwach erweist.

In Wirklichkeit können nicht alle Stoßwellen, bei denen die Grenzbedingungen erfüllt sind und die Entropie wächst, zustande kommen.

Außerdem ist nämlich nötig, daß die Lösung stetig von den Anfangs- und Grenzbedingungen abhängt, d. h., daß eine unendlich kleine Schwankung der magnetohydrodynamischen Größen eine unendlich kleine Veränderung der Lösung hervorruft. Solche Sprünge werden wir nach I. M. GEL'FAND [33a] evolutionäre (evolucionnye) nennen. Bei nichtevolutionären Sprüngen ruft eine unendlich kleine Schwankung eine endliche Veränderung der Lösung hervor und außerdem eine Aufspaltung des Ausgangssprunges in einige Sprünge von endlicher Größe [40]. Nichtevolutionäre Sprünge sind deshalb instabil in bezug auf die Aufspaltung und existieren nicht. Die Evolutionsbedingungen für die Magnetohydrodynamik wurden in [40] aufgestellt. Um festzustellen, ob eine magnetohydrodynamische Stoßwelle evolutionär ist, muß man zu den Gleichgewichtswerten der magnetohydrodynamischen Größen p , ϱ , v_x , v_y , v_z , H_y , H_z die unendlich kleinen Schwankungen δp , $\delta \varrho$, δv_x , δv_y , δv_z , δH_y , δH_z hinzufügen, deren Abhängigkeit von den Koordinaten und der Zeit die Form

$$\exp i(kx - \omega t)$$

hat. Diese Schwankungen kann man als Superposition von Wellen unendlich kleiner Amplitude darstellen (Magnetoakustische, Alfvénsche und Entropie-Wellen). Außerdem muß man noch die Wellen berücksichtigen, die von der Sprungfläche auslaufen. Nach der Linearisierung der Grenzbedingungen erhält man sieben lineare homogene algebraische Gleichungen in bezug auf die Amplituden der verschiedenen Wellen auf beiden Seiten der Sprungfläche. Dabei muß man berücksichtigen, daß die Geschwindigkeit der Stoßwelle D auch den unendlich

kleinen Zusatz δD erhält. Nach Eliminierung der Größe δD bleiben sechs unabhängige Gleichungen (Grenzbedingungen). Wenn die Zahl der nach beiden Seiten von der Sprungfläche auseinander laufenden Wellen auch gleich sechs ist, so erhalten wir ein System aus sechs linearen homogenen algebraischen Gleichungen mit sechs Unbekannten (den Amplituden der Wellen unendlich kleiner Intensität). Voraussetzung für die Existenz einer nichttrivialen Lösung (in der die Amplituden der Wellen von Null verschieden sind) ist nun, daß die Determinante des Systems gleich Null ist. Die so erhaltene Gleichung stellt die Abhängigkeit zwischen ω und k dar. Wenn einem beliebigen k ein reelles ω entspricht, so ist der Sprung stabil im üblichen Sinne; wenn aber möglichen Werten von k ein ω mit positivem Imaginärteil entspricht, so ist der Sprung instabil, die Anfangsschwankung wird exponentiell mit der Zeit anwachsen. In beiden Fällen ist der Sprung aber evolutionär. Wenn auch die Schwankungen exponentiell anwachsen, so werden sie doch im Verlaufe einer kleinen Zeitspanne noch klein sein.

Damit der Sprung nichtevolutionär wird, ist es nötig, daß die Störungen, die im Anfangsmoment $t = 0$ klein waren, zu einer beliebigen Zeit $t > 0$ nicht kleiner werden. Hierbei ist die früher durchgeführte Linearisierung der Gleichungen nicht zulässig, was dazu führt, daß die Zahl der Gleichungen zur Bestimmung der Wellenamplituden mit unendlich kleiner Intensität nicht gleich der Zahl der Unbekannten, d. h. nicht gleich der Zahl der Wellen ist, die von der Sprungfläche aus nach beiden Seiten auseinanderlaufen. Weil die Zahl der unabhängigen Grenzbedingungen in der Magnetohydrodynamik gleich sechs ist, so besteht die Evolutionsbedingung darin, daß im allgemeinen die Zahl der auseinanderlaufenden Wellen auch gleich sechs sein muß. In der Magnetohydrodynamik gibt es vierzehn verschiedene Phasengeschwindigkeiten für die Ausbreitung von Wellen mit unendlich kleiner Amplitude:

$$\begin{aligned} v_{1x} + U_{1x}, v_{1x} - U_{1x}, v_{1x} + U_{1+}, v_{1x} - U_{1+}, v_{1x} + U_{1-}, \\ v_{1x} - U_{1-}, v_{1x}, v_{2x} + U_{2x}, v_{2x} - U_{2x}, v_{2x} + U_{2+}, v_{2x} - U_{2+}, \\ v_{2x} + U_{2-}, v_{2x} - U_{2-}, v_{2x} \end{aligned}$$

(der Index 1 bezieht sich auf das Gebiet vor der Stoßwelle ($x < 0$), der Index 2 auf das Gebiet hinter der Stoßwelle ($x > 0$); das Koordinatensystem wurde so gewählt, daß in ihm der Sprung ruht und sich in der Ebene $x = 0$ befindet; die Richtung der x -Achse wurde so gelegt, daß die Projektion der Geschwindigkeit des Mediums auf die x -Achse positiv wird). Den im Gebiet vor der Stoßwelle auseinanderlaufenden Wellen entspricht eine negative Phasengeschwindigkeit, den im Gebiet hinter der Stoßwelle laufenden eine positive Phasengeschwindigkeit. Von den vierzehn aufgezählten Phasengeschwindigkeiten entsprechen vier Geschwindigkeiten einlaufenden Wellen:

$$v_{1x} + U_{1x}, v_{1x} + U_{1+}, v_{1x} + U_{1-}, v_{1x},$$

und vier gehören zu auslaufenden Wellen:

$$v_{2x} + U_{2x}, v_{2x} + U_{2+}, v_{2x} + U_{2-}, v_{2x}$$

(alle diese Phasengeschwindigkeiten sind offensichtlich positiv). Die übrigen Wellen werden einlaufende oder auslaufende sein in Abhängigkeit von den Beziehungen zwischen den Größen v_x und U_x, U_+, U_- . Auf Bild 1 ist die Gesamtzahl der auslaufenden Wellen bei verschiedener Größe von v_{1x} und v_{2x} dargestellt. Den evolu-

tionären Wellen entsprechen die Gebiete der $v_{1x}-v_{2x}$ — Fläche, in denen die Zahl der auslaufenden Wellen gleich sechs ist.

Wie wir sagten, wird die Stoßwelle evolutionär, wenn das Problem der kleinen Störungen eine eindeutige Lösung hat. Dazu ist notwendig, daß die Zahl der Gleichungen (Zahl der Grenzbedingungen minus eins) der Zahl der Unbekannten entspricht (Zahl der Amplituden auslaufender Wellen)¹⁾.

v_{2x}				
	$3+7=10$	$3+6=9$	$2+6=8$	$2+5=7$
U_{2+}	$3+6=9$	$3+5=8$	$2+5=7$	$2+4=6$
U_{2x}	$2+6=8$	$2+5=7$	$1+5=6$	$1+4=5$
U_{2-}	$2+5=7$	$2+4=6$	$1+4=5$	$1+3=4$
	U_{1-}	U_{1x}	U_{1+}	v_{1x}

Bild 1. Zahl der Wellen, die von der Sprungfläche ausgehen. Der erste Summand gibt die Zahl der Alfvénischen Wellen, der zweite Summand die Zahl der magnetoakustischen und Entropiewellen.

Die Gleichheit der Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten reicht jedoch für Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nicht aus. Es kann vorkommen, daß die Gleichungen, die zur Bestimmung von Amplituden auslaufender Wellen dienen, und die Grenzbedingungen in isolierte Gruppen zerfallen. Hierbei müssen die Evolutionsbedingungen (die Zahl der auslaufenden Wellen sei gleich der Zahl der unabhängigen Grenzbedingungen) nicht nur für die Gesamtzahl der Veränderlichen, sondern auch für jede isolierte Gruppe gesondert erfüllt werden.

Ein solcher Zerfall der Gleichungen und der Grenzbedingungen in zwei isolierte Gruppen trifft in der Magnetohydrodynamik für Wellen zu, die sich senkrecht zur Sprungfläche ausbreiten²⁾. Tatsächlich sind in Alfvénischen Wellen mit kleiner Amplitude die Werte δv_z und δH_z von Null verschieden (wenn die xy -Ebene so liegt, daß $H_z \equiv 0$ ist); während in magnetoakustischen und Entropiewellen die Werte $\delta \rho$, δp , δv_x , δv_y , δH_y von Null verschieden sind. In diese beiden Gruppen zerfallen auch die Grenzbedingungen, die linearisiert sind in bezug auf kleine Störungen:

1. Alfvénische Störungen

$$\left\{ \rho v_x \delta v_z - \frac{H_x \delta H_z}{4\pi} \right\} = 0, \\ \{v_x \delta H_z - H_x \delta v_z\} = 0; \quad (4.1)$$

2. Magnetoakustische- und Entropiestörungen

$$\left. \begin{aligned} &\{\rho(\delta v_x - \delta D) + v_x \delta \rho\} = 0, \\ &\left\{ \delta p + 2\rho v_x (\delta v_x - \delta D) + v_x^2 \delta \rho + \frac{H_y \delta H_y}{4\pi} \right\} = 0, \\ &\left\{ \rho v_x \delta v_y - \frac{H_x \delta H_y}{4\pi} \right\} = 0, \\ &\{H_x \delta v_y - H_y (\delta v_x - \delta D) - v_x \delta H_y\} = 0, \\ &\left\{ \rho v_x [v_x (\delta v_x - \delta D) + v_y \delta v_y + \delta w] + \frac{1}{4\pi} (v_x H_y - v_y H_x) \delta H_y \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

(δD : Störung der Stoßwellengeschwindigkeit, w : Enthalpie).

¹⁾ In dieser Formulierung wurden die Evolutionsbedingungen von LAX [19], K. I. BABENKO und I. M. GEL'FAND [41] angegeben.

²⁾ Dieser Umstand wurde zuerst von S. I. SYROVATSKIJ [42] bemerkt.

Die Grenzbedingungen (4.1) enthalten δD nicht. Deshalb sind sie alle unabhängig, und die Zahl der auslaufenden Alfvénischen Wellen muß gleich zwei sein. Die Grenzbedingungen (4.2) enthalten die Störung der Stoßwellengeschwindigkeit δD ; nach ihrer Eliminierung verbleiben vier unabhängige Grenzbedingungen. Folglich muß die Zahl der auslaufenden magnetoakustischen und Entropie-Wellen gleich vier sein. Aus Bild 1 geht hervor, daß zwei Evolutionitätsgebiete für Stoßwellen existieren¹⁾ (Bild 2):

1. Schnelle Stoßwellen (auf Bild 2 mit dem Plus-Zeichen gekennzeichnet):

$$U_{1+} < v_{1x}, U_{2x} < v_{2x} < U_{2+}. \quad (4.3)$$

2. Langsame Stoßwellen (auf Bild 2 mit dem Minus-Zeichen gekennzeichnet):

$$U_{1-} < v_{1x} < U_{1+}, v_{2x} < U_{2-}. \quad (4.4)$$

Bis jetzt haben wir Evolutionsbedingungen in bezug auf die Störungen betrachtet, die nur von x und t abhängen. Eine Berechnung der Störungen von allgemeiner Art (die auch von y und z abhängen), führt zu den gleichen Evolutionsbedingungen (4.3) und (4.4) [44].

Man muß betonen, daß ein wesentlicher Unterschied zwischen Nichtevo-lutionität und Instabilität besteht. Instabile Zustände können bei der Bewegung des magnetohydrodynamischen Mediums unter der Wirkung innerer Ursachen entstehen. Sie existieren einige Zeit, bis die Fluktuation eine kritische Höhe erreicht hat, wonach der instabile Zustand zerfällt. Nichtevo-lutionäre Sprünge können nicht aus sich selbst entstehen. Sie können sich nur unter der Wirkung von äußeren Faktoren (z. B. beim Zusammenstoß von Gasmassen) bilden und nur einen Augenblick als Sprünge in den Anfangsbedingungen existieren, wonach sie schnell in einige Stoß- bzw. Automodellwellen aufspalten. Eine solche Spaltung einer nichtevo-lutionären magnetohydrodynamischen Stoßwelle wurde in der Arbeit [45] untersucht (s. § 8).

Mit der Methode, die in diesem Paragraphen dargelegt ist, kann man nachweisen, daß auch alle anderen magnetohydrodynamischen Sprünge (Kontakt-, Tangential-, Alfvén-Sprünge) evolutionär sind.

§ 5 Konsequenzen der Evolutionsbedingungen

Die Bedingungen (4.3), (4.4) haben wichtige Konsequenzen. Wenn z. B. zwei Stoßwellen gleicher Art (beide schnell oder beide langsam) aufeinander folgen, so holt die nachlaufende die vorlaufende ein. Zum Beweis dieser Behauptung

¹⁾ Die Arbeiten [43] und [40] enthalten eine unrichtige Behauptung über die Existenz eines dritten Evolutionitätsgebietes.

$$U_{1x} < v_{1x} < U_{1+}, U_{2-} < v_{2x} < U_{2x}.$$

Dabei wurde aber der oben besprochene Zerfall der Grenzbedingungen in zwei isolierte Gruppen nicht beachtet. (In den Arbeiten wird an Stelle von Evolutionität der weniger zutreffende Terminus „Stabilität in bezug auf Spaltung“ benutzt.)

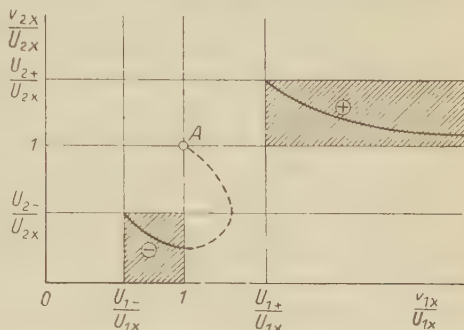


Bild 2. Evolutionsgebiete für Stoßwellen (schraffiert). Das Zeichen + kennzeichnet die schnelle, das Zeichen - die langsame Stoßwelle. Der evolutionäre Teil der Stoßadiabate wird durch die ausgezogene Linie dargestellt, der nicht-evolutionäre Teil ist gestrichelt wiedergegeben. Mit dem Buchstaben A wird der Alfvénische Sprung gekennzeichnet.

betrachten wir z. B. zwei langsame Wellen. Die Geschwindigkeit der vorlaufenden Welle ist in bezug auf das Medium, das zwischen den Wellen eingeschlossen ist, gleich v_{2x} , und die Geschwindigkeit der nachlaufenden Welle ist gleich v_{1x} . Wie aus der Ungleichung (4.4) hervorgeht, ist für Wellen des untersuchten Typs $v_{1x} > U_{1-}$, $v_{2x} < U_{2-}$. Da sich die Geschwindigkeiten U_{1-} und U_{2-} auf ein und dasselbe Gebiet beziehen, ist $U_{1-} = U_{2-}$ und folglich $v_{1x} > v_{2x}$.

Bei Wellen verschiedenen Typs kann man leicht feststellen, daß der Alfvénsche Sprung die langsame Stoßwelle einholt und daß die schnelle Stoßwelle alle Arten von Sprüngen einholt. Analog kann man feststellen, daß eine Stoßwelle einen schwachen Sprung einholt, wenn er zum selben Typ gehört wie die Stoßwelle, oder zu einem langsameren. Ein schwacher Sprung holt eine Stoßwelle gleichen Typs und Stoßwellen langsameren Typs ein.

Da ein schwacher Sprung eine Grenze zwischen einer einfachen Welle und dem Gebiet stetigen Fließens darstellt, kommen wir zu der Schlußfolgerung, daß sich nach jeder Seite nicht mehr als drei Stoßwellen oder einfache Wellen bewegen können ohne einander einzuholen: vorlaufend eine schnelle Welle (Stoßwelle oder einfache magnetoakustische Welle), hinter ihr eine Alfvénsche Welle (Sprung- oder einfache Welle) und schließlich eine langsame Welle (Stoß- oder einfache Welle).

Benutzt man die Evolutionsbedingungen und das Zemplensche Theorem, so kann man auch bestimmte Schlußfolgerungen über die Änderung des Magnetfeldes in schnellen und langsamen Stoßwellen ziehen [38]. Wir benutzen die Beziehung

$$H_{2y} = \frac{H_{1y} \varrho_2 (v_{1x}^2 - U_{1x}^2)}{\varrho_1 v_{1x}^2 - \varrho_2 U_{1x}^2}, \quad (5.1)$$

die eine Folge der Grenzbedingungen ist. Aus der Formel (5.1) folgt, daß sich bei schnellen Stoßwellen das transversale Magnetfeld H_y vergrößert und bei langsamen verkleinert. In beiden Fällen ändert das transversale Magnetfeld seine Richtung nicht¹⁾. Kleine Magnetfelder

$$\frac{H_x^2}{8\pi} < \frac{\varrho_1 v_{1x}^2}{2}$$

werden beim Durchlaufen der Stoßwelle verstärkt, während große Magnetfelder

$$\frac{H_x^2}{8\pi} > \frac{\varrho_1 v_{1x}^2}{2}$$

geschwächt werden. Das weist auf eine etwas ausgleichende Rolle der Stoßwellen hin. Beim Durchgang einer großen Zahl unabhängiger Stoßwellen tritt das statische Gleichgewicht mit Gleichheit der magnetischen und der kinetischen Energie ein²⁾:

$$\frac{H_x^2}{8\pi} = \frac{\varrho_1 v_{1x}^2}{2}. \quad (5.2)$$

¹⁾ Die in den Arbeiten [46], [43], [47] enthaltenen Behauptungen über die Möglichkeit der Richtungsänderung des transversalen Magnetfeldes in der Stoßwelle rühren von der Nichtbeachtung der Evolutionsbedingungen her.

²⁾ Die Relation (5.2) (Gesetz über die Gleichverteilung der Energie) ist charakteristisch für die Magnetohydrodynamik. Sie wurde, von anderen Überlegungen ausgehend, in den Arbeiten [48–51] gefunden.

In der Literatur gibt es Hinweise dafür, daß schwache Magnetfelder

$$\frac{H_x^2}{8\pi} \ll p_1 \quad (5.3)$$

beim Durchlaufen einer Stoßwelle verstärkt werden [14], [52] und [53], Seite 253. Genauer gesagt, existieren bei einer beliebigen Beziehung zwischen H_x und p_1 zwei Stoßwellen: eine schnelle, in der das Magnetfeld verstärkt wird, und eine langsame, in der das Magnetfeld geschwächt wird. Jedoch darf bei Anwendung der Ungleichung (5.3) die langsame Stoßwelle nur eine unendlich kleine Intensität haben, wie aus den Evolutionsbedingungen (4.4) folgt:

$$0 < \frac{1}{\varrho_1} < \frac{H_1^2}{8\pi p_1}. \quad (5.4)$$

Bei Verletzung der Ungleichung (5.4) hört die langsame Stoßwelle auf, evolutionär zu sein und wird gespalten. Auf diese Weise können in einem Medium, in dem der magnetische Druck bedeutend geringer ist als der hydrostatische (5.3), in Wirklichkeit nur schnelle Stoßwellen existieren, bei deren Durchgang das Magnetfeld verstärkt wird. Aus dem Dargelegten folgt, daß magnetohydrodynamische Wellen einer der Mechanismen zur Bildung interstellarer Magnetfelder sind [14].

§ 6 Die Stoßadiabate

In der Magnetohydrodynamik wird die Stoßwelle charakterisiert durch die Werte aller magnetohydrodynamischen Größen ϱ_1 , p_1 , v_1 , H_1 vor der Stoßwelle und durch den Wert einer von ihnen (z. B. ϱ_2) hinter der Stoßwelle. Alle übrigen Größen hinter der Stoßwelle, auch der Druck p_2 , sind Funktionen von ϱ_2 . Die Kurve $p_2 = f(1/\varrho_2)$ wird Stoßadiabate genannt. Wenn man das Koordinatensystem so auswählt, daß in ihm der Sprung ruht und in der Fläche $x = 0$ liegt, die Projektion des Magnetfeldes auf die z -Achse gleich Null ist und der Geschwindigkeitsvektor parallel zum Magnetfeld ist, so wird die Gleichung der Stoßadiabate

$$p_2 = f\left(\frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Als Parameter enthält sie die Größen p_1 , ϱ_1 , H_x , H_{1y} :

$$p_2 = f\left(\frac{1}{\varrho_2}; \quad p_1, \varrho_1, H_x, H_{1y}\right). \quad (6.1)$$

An Stelle der fünf dimensionsbehafteten Parameter ϱ_2 , p_1 , ϱ_1 , H_x , H_{1y} kann man zur Charakterisierung der Stoßwelle drei dimensionslose Parameter benutzen [14], z. B. U_{1x}/c_1 , U_{1y}/c_1 , v_{1x}/c_1 , wobei U die Alfvénsche Geschwindigkeit und v_{1x} die Geschwindigkeit der Stoßwelle in bezug auf die ruhende Flüssigkeit ist.

Für das Auffinden der Stoßadiabate ist es nötig, in den Grenzbedingungen alle magnetohydrodynamischen Größen zu eliminieren, die nicht in Formel (6.1) eingehen. Die Gleichung der Stoßadiabate in der Magnetohydrodynamik hat folgendes Aussehen [30, 31]:

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \frac{p_2 + p_1}{2} \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) + \frac{1}{16\pi} \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) (H_{2y} - H_{1y})^2 = 0. \quad (6.2)$$

In dieser Formel wird die innere Energie ε_2 durch p_2 und ϱ_2 mit Hilfe der Zustandsgleichung ausgedrückt; H_{2y} setzt man entsprechend Formel (5.1) ein.

Die Gleichung (6.2) ist eine algebraische Gleichung dritten Grades in bezug auf p_2 bzw. ϱ_2 ; folglich gibt es drei Zweige der Stoßadiabate [14, 46, 36, 54], jedoch

nur zwei von ihnen sind evolutionär [55]. Im Spezialfall der senkrechten Stoßwelle ($H_x = 0$) gibt es nur einen evolutionären Zweig der Stoßadiabate.

Die Änderung der magnetohydrodynamischen Größen in der Stoßwelle wurde zum erstenmal von HELFER [14] untersucht. Die Darstellungen, die HELFER bringt, sind jedoch infolge einer unglücklichen Auswahl der Parameter ohne Wert. Außerdem wurde in dieser Arbeit kein Unterschied zwischen evolutionären und nicht-evolutionären Stoßwellen gemacht.

In der später erschienenen Arbeit von LÜST [46] wird eine Untersuchung der Parameterabhängigkeit wesentlicher physikalischer Größen der Stoßwelle (Dichte, Druck, Magnetfeld, Wärmeenergie und Winkel zwischen der Richtung des Magnetfeldes und der Normalen) durchgeführt. Die Abhängigkeit dieser Größen wurde in vielen Diagrammen dargestellt, die mit einer elektronischen Rechenmaschine erhalten wurden. Leider berücksichtigt der Autor die Evolutionsbedingungen nicht; in Wirklichkeit können nur die Abschnitte der von LÜST aufgestellten Kurve existieren, die evolutionären Stoßwellen entsprechen. Als Bei-

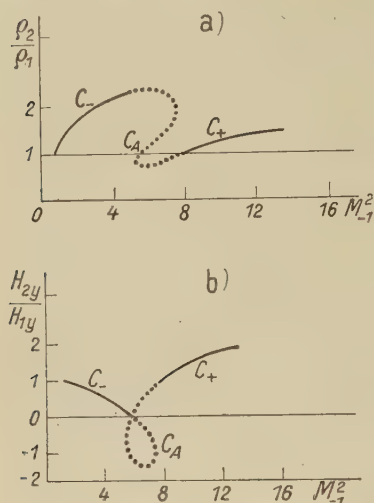


Bild 3. Dichte (a) und magnetischer Feldstärke (b) in der Stoßwelle in Abhängigkeit von der Mach-Zahl. Die nichtevolutionären Teile sind punktiert gezeichnet. C_- kennzeichnet die schnelle, C_+ die langsame Stoßwelle; C_A markiert die (nicht wirklich existierende) nichtevolutionäre Stoßwelle.

spiel sind auf Bild 3a und b die von LÜST gefundenen Abhängigkeiten der Größen ϱ_2/ϱ_1 und H_{2y}/H_{1y} von der Mach-Zahl

$$M_{-1}^2 \equiv \frac{v_{1x}^2}{U_{1-}^2}$$

dargestellt; dabei ist

$$\beta_1 \equiv \frac{(3p_1/2)}{(3p_1/2) + (H_1^2/8\pi)} = 0.25, \quad \eta_1^2 \equiv \frac{H_x^2}{H_1^2} = 0.75.$$

Eine vollständigere Untersuchung der Größen in der magnetohydrodynamischen Stoßwelle wurde von BAZER und ERICSON [47] durchgeführt. Jedoch auch in dieser Arbeit finden die Evolutionsbedingungen keine Berücksichtigung. Im folgenden werden wir die Resultate von BAZER und ERICSON durch Untersuchungen evolutionärer Teile der Stoßadiabate ergänzen [55].

Es gibt schnelle und langsame Stoßwellen. Schnelle Wellen sind immer evolutionär. Langsame Stoßwellen von kleiner Intensität sind auch evolutionär. In dem Maße, wie sich der Dichtesprung $\Delta \varrho \equiv \varrho_2 - \varrho_1$ der langsamen Stoßwelle vergrößert, wird das transversale Magnetfeld H_{2y} hinter der Welle geschwächt, und in der Grenze des Evolutionsgebietes geht es gegen Null. Bei weiterem Fort-

schreiten längs der Stoßadiabate folgt der nichtevolutionäre Teil der langsamen Stoßwellen, der stetig zum Alfvénschen Sprung führt (siehe Bild 2). Druck- und Entropiesprung in schnellen und langsamen Stoßwellen sind im Evolutionsgebiet monoton wachsende Funktionen des Dichtesprunges. In schnellen Stoßwellen ist der maximale Dichtesprung gleich $(\Delta \varrho)_{\max} = 2\varrho_1/(\gamma - 1)$, wobei γ der Poissonsche Adiabatenexponent ist; hierbei geht der Druck- und der Entropiesprung gegen unendlich. Es gibt zwei Typen der Abhängigkeit des Magnetfeldsprunges $\Delta H_y \equiv H_{2y} - H_{1y}$ vom Dichtesprung in schnellen Wellen. In Wellen des ersten Typs, die existieren, wenn

$$\sin^2 \theta_1 \geq \frac{(\gamma - 1)(1 - r_1)}{\gamma}$$

ist, ($r_1 = c_1^2/U_{1x}^2 \equiv 4\pi\gamma p_1/H_x^2$, θ_1 : Winkel zwischen der Richtung des Magnetfeldes H_1 und der Normalen der Sprungfläche) wächst der Magnetfeldsprung beim Anwachsen des Dichtesprunges monoton von Null bis zum maximalen Wert

$$(\Delta H_y)_{\max} = \frac{2H_{1y}}{\gamma - 1}$$

an.

In Wellen des zweiten Typs, die existieren, wenn

$$\sin^2 \theta_1 < \frac{(\gamma - 1)(1 - r_1)}{\gamma}$$

ist, gibt es eine nichtmonotone Abhängigkeit des Magnetfeldsprunges vom Dichtesprung: bei Anwachsen des Dichtesprunges vergrößert sich anfangs der Magnetfeldsprung von Null bis zu einer gewissen Maximalgröße, und danach sinkt er wieder bis auf den Wert

$$\Delta H_y = \frac{2H_{1y}}{\gamma - 1}.$$

Auf dem evolutionären Abschnitt der langsamen Stoßwelle wächst der Feldsprung immer mit dem Dichtesprung¹⁾.

Im Grenzfalle $\theta_1 \rightarrow 0$, $r_1 > 1$ verhält sich die schnelle Welle so, als sei das Magnetfeld nicht vorhanden, und die langsame Welle hat eine unendlich kleine Amplitude. Im Falle von $\theta_1 \rightarrow 0$, $r_1 < 1$ gehört die schnelle Welle zum zweiten Typ. Bei kleiner Intensität der schnellen Stoßwelle ($\varrho_2/\varrho_1 < (\gamma + 1 - 2r_1)/(\gamma - 1)$) ist das transversale Magnetfeld H_{2y} hinter der Welle noch von Null verschieden. Wenn die Intensität der Stoßwelle ϱ_2/ϱ_1 den Wert $(\gamma + 1 - 2r_1)/(\gamma - 1)$ übersteigt, wird das transversale Magnetfeld H_{2y} hinter der Welle gleich Null, und die Stoßwelle verhält sich so wie beim Nichtvorhandensein des Magnetfeldes.

Die langsame Welle verhält sich im ganzen evolutionären Bereich für $\theta_1 \rightarrow 0$, $r_1 < 1$ so, als sei kein Magnetfeld vorhanden. Im Grenzfalle $\theta_1 \rightarrow \pi/2$ ist die schnelle Stoßwelle einer Welle des ersten Typs, und die langsame Stoßwelle verwandelt sich in einen tangentiellen Sprung.

¹⁾ Mit anderen Worten: Langsame Stoßwellen gehören immer zum ersten Typ. Die Behauptung von BAZER und ERICSON [47], in langsamen Stoßwellen sei eine nichtmonotone Abhängigkeit des Magnetfeldsprunges vom Dichtesprung möglich, wurde ohne Berücksichtigung der Evolutionsbedingungen aufgestellt.

Das Vorhandensein eines Magnetfeldes vergrößert den Drucksprung bei fest gegebenem Dichtesprung [47]¹⁾.

In schnellen Stoßwellen großer Intensität ($p_2 \gg p_1 + H_1^2/8\pi$) ist das Vorhandensein eines Magnetfeldes unwesentlich [53, 46]. Insbesondere ist die größte Kompression ρ_2/ρ_1 , die in der Stoßwelle erhalten werden kann [57, 47], gleich $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$. Eine langsame Stoßwelle kann keine beliebig große Intensität haben. Deshalb gibt es bei

$$p_2 \gg p_1 + H_1^2/8\pi$$

nur eine Stoßwelle [36, 46] (nämlich eine schnelle).

In den Veränderlichen $(1/\rho_2, p_2)$ wurden evolutionäre Bereiche der Stoßadiabate nur für die Grenzfälle $H_{1y} \ll H_x$ (Bild 4a) und $H_{1y} \gg H_x$ (Bild 4b) bestimmt [55]. Wie aus Bild 4a ersichtlich ist, ist im Falle von $H_{1y} \ll H_x$ der Abschnitt der Stoßadiabate, der einer schnellen Stoßwelle entspricht, höher gelegen, als der Bereich, der einer langsamen Stoßwelle entspricht. Das bedeutet, daß bei $H_{1y} \ll H_x$ die schnelle Stoßwelle thermodynamisch günstiger ist: auf ihr wächst die Entropie sehr stark. Im Falle von $H_{1y} \gg H_x$ erweist sich die langsame Stoßwelle als thermodynamisch günstiger (Bild 4b).

Den Unterschied in der relativen Lage der Teile der Adiabate, die einer schnellen und einer langsamen Stoßwelle entsprechen, kann man auf Bild 4a und 4b auf folgende Weise erklären. In der Stoßwelle geht ein Übergang der kinetischen Energie $\rho_1 v_{1x}^2/2$ in magnetische $H_2^2/8\pi$ und Wärmeenergie $3p_2/2$ vor sich. Der schnellen Stoßwelle entspricht eine größere Übertragung an kinetischer Energie. Im Falle von $H_{1y} \ll H_x$ wird die magnetische Energie wenig geändert; deshalb entspricht der schnellen Stoßwelle eine größere Aufheizung. Im Falle von $H_{1y} \gg H_x$ wird die magnetische Energie merklich beeinflusst. Da das Magnetfeld in einer schnellen Stoßwelle verstärkt wird, in einer langsamen aber geschwächt wird [38], ist es klar, daß in einer schnellen Stoßwelle bei $H_{1y} \gg H_x$ eine Aufheizung vor sich geht.

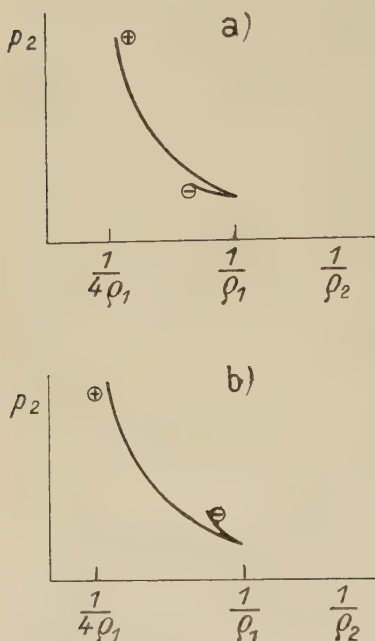


Bild 4. Die evolutionären Teile der Stoßadiabate in den Veränderlichen $1/\rho_2$ und p_2 : a) für $H_{1y} \ll H_x$, b) $H_{1y} \gg H_x$. Das Zeichen + kennzeichnet die schnelle, das Zeichen - die langsame Stoßwelle.

§ 7 Das Kolbenproblem

Bei Betrachtung des Kolbenproblems tauchen in der Magnetohydrodynamik zwei prinzipielle Schwierigkeiten auf, die es in der gewöhnlichen Hydrodynamik nicht gibt. Die erste Schwierigkeit besteht darin, daß die Grenzbedingungen an den Sprungflächen und auf dem Kolben die entstehenden Stoßwellen und stetigen Wellen nicht eindeutig bestimmen. Im Falle eines idealen Gases erhält man eine

¹⁾ Im Falle $H_x = 0$ wurde diese Tatsache von G. S. GOLICYN [56] festgestellt.

große Zahl von Lösungen für eine vorgegebene Bewegung des Kolbens. Es entspricht jedoch nur eine dieser Lösungen den Evolutionsbedingungen. Deshalb beseitigt die Elimination der nichtevolutionären Sprünge die oben erwähnte Schwierigkeit und löst das Kolbenproblem mathematisch korrekt.¹⁾

Eine zweite Schwierigkeit besteht darin, daß stetige Strömungen, die bei der Bewegung des Kolbens entstehen, nicht immer einfache Wellen sind. Selbstverständlich findet man beim Fehlen von Sprüngen an eine konstante Strömung angrenzend zunächst einfache Wellen. Jedoch braucht dieses Gebiet nicht bis zum Kolben zu reichen, denn zwischen dem Kolben und der einfachen Welle kann ein zweites Gebiet liegen, in dem die Welle nicht einfach ist (Bild 5). Um diese Schwierigkeit zu umgehen, werden wir nur Bewegungen des Kolbens mit konstanter Geschwindigkeit untersuchen. Da hierbei im Problem ein Parameter fehlt, der die Dimension einer Länge hat, wird die Bewegung des Mediums automodellartig sein, d. h., alle entstehenden Wellen werden entweder Sprungwellen oder einfache Wellen sein.

Die Bewegung des Mediums unter dem Einfluß der Kolbenbewegung wird charakterisiert durch die Reihenfolge der nacheinanderlaufenden Stoß- und Automodellwellen. Wie wir gesehen haben, gibt es drei Arten von evolutionären Sprungwellen: schnelle und langsame Stoßwellen und Alfvénsche Sprünge. Außerdem existieren zwei Arten von stetigen Lösungen: schnelle und langsame magnetoakustische Automodellwellen. Wie weiter oben bemerkt wurde, sind Stoßwellen Kompressionswellen und Automodellwellen Dilatationswellen. Die Geschwindigkeiten dieser Wellen sind so, daß vorn eine schnelle Welle laufen kann (Stoß- oder Automodellwelle), ihr folgt ein Alfvénscher Sprung und schließlich eine langsame Welle (Stoß- oder Automodellwelle). Wenn man berücksichtigt, daß einige der aufgezählten Wellen fehlen können, so erhält man eine große Zahl qualitativ verschiedener Bewegungsbilder des Mediums, die bei verschiedenen Werten der Sprunggeschwindigkeit realisiert werden.

Auf der Kolbenoberfläche gelten offensichtlich die Grenzbedingungen

$$v_x = u_x. \quad (7.1)$$

Um die restlichen zwei Bedingungen zu erhalten, muß man zu einem Bezugssystem übergehen, das sich mit dem Kolben mitbewegt, wobei auf der Oberfläche des

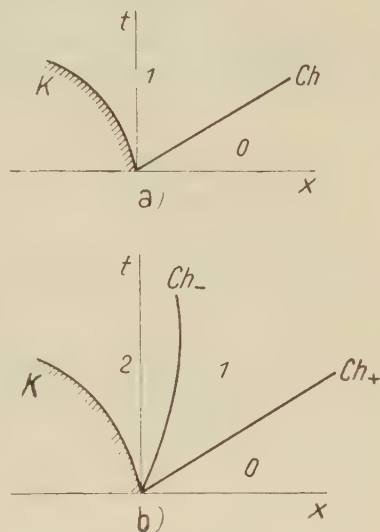


Bild 5. Wellen, die bei der Bewegung eines Kolbens auftreten:

a) in der gewöhnlichen Hydrodynamik, b) in der Magnetohydrodynamik. K : Bahnkurve des Kolbens, Ch : Charakteristik in der gewöhnlichen Hydrodynamik $dx/dt = v_x + c$; Ch_+ : „Schnelle“ Charakteristik in der Magnetohydrodynamik $dx/dt = v_x + U_+$; Ch_- : „Langsame“ Charakteristik in der Magnetohydrodynamik $dx/dt = v_x + U_-$; 0: Ungestörtes Gebiet; 1: Einfache Welle; 2: Welle allgemeineren Typs (nicht mehr einfach).

¹⁾ Diese Schwierigkeit kann man auch ohne Benutzung der Evolutionsbedingungen umgehen, wenn man sich auf Kolbenbewegungen beschränkt, bei denen keine langsamen Stoßwellen entstehen [58].

mitgeführten Kolbens die Grenzbedingungen $E'_y = 0$, $E'_z = 0$ gelten (der Strich bedeutet, daß die entsprechende Größe in dem mit dem Kolben mitbewegten Koordinatensystem gemessen ist). Infolge der unendlichen Leitfähigkeit des Mediums ist $\vec{E}' = -1/c [\vec{v}', H]$ (c : Lichtgeschwindigkeit), und daraus folgt

$$v_y = u_y, \quad v_z = u_z \quad (H_x \neq 0). \quad (7.2)$$

Auf diese Weise ist auf metallischen Oberflächen die Relativgeschwindigkeit der leitenden Flüssigkeit gleich Null (eine Ausnahme bildet der Fall, daß das Magnetfeld keine Normalkomponente hat). Es zeigt sich eine interessante Erscheinung, die

man „elektrodynamische Zähigkeit“ [59] nennt.

Bei genügend großer Amplitude einer Dilatationsstoßwelle geht die Dichte des Mediums hinter der Welle gegen Null, es tritt Kavitation ein. Hierbei müssen an der Grenze des Vakuums Magnetfeld und transversale Komponente des elektrischen Feldes stetig sein, d. h., sie müssen die Grenzbedingungen

$$\varrho = 0,$$

$$\begin{aligned} H_x(u_y - v_y) - H_y(u_x - v_x) &= 0, \\ H_x(u_z - v_z) - H_z(u_x - v_x) &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

erfüllen.

Betrachten wir nun den interessanten Fall, daß das Magnetfeld, die Kolbengeschwindigkeit und die Normale der Kolbenoberfläche in einer Ebene liegen (dies sei die xy -Ebene). Die Größen v_z und H_z werden hierbei nicht nur im nichtbewegten Medium, sondern auch in allen entstehenden Wellen gleich Null sein. Deshalb kann der Alfvénsche Sprung das Magnetfeld nur um 180° drehen. Machen wir noch die ungestörte Geschwindigkeit des Mediums v_0 zu Null und setzen wir außerdem fest, daß die Komponenten des nichtgestörten Magnetfeldes H_{0x} und H_{0y} positiv

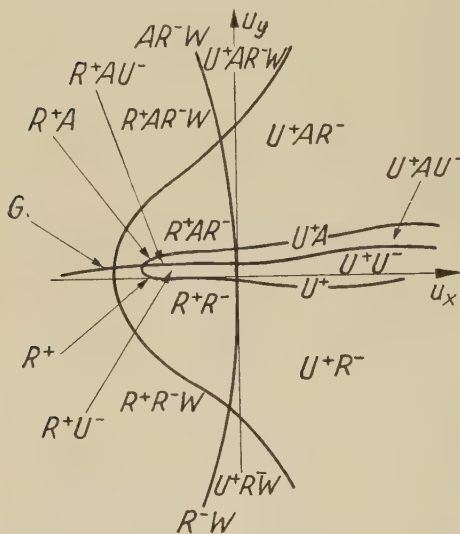


Bild 6. Wellen, die bei der Bewegung eines Kolbens entstehen.

Auf der Abszisse ist die Längskomponente der Kolbengeschwindigkeit u_x , auf der Ordinate die Querkomponente u_y aufgetragen. Die Buchstaben U^+ , U^- , R^+ , R^- , A kennzeichnen das Vorhandensein von schnellen und langsamen Stoßwellen, schnellen und langsamen Dilatationswellen (Automodellwellen) bzw. die Existenz eines Alfvénschen Sprunges. GV ist der Punkt größter, in der Automodellwelle erreichter Dilatation. W kennzeichnet das Auftreten von Kavitation.

sind, so hängen die Wellen, die bei der Bewegung des Kolbens unter diesen Bedingungen entstehen, nur noch von seiner Geschwindigkeit (u_x , u_y) ab. Diese Abhängigkeit [60] ist in Bild 6 dargestellt. Bei einer genügend großen Amplitude der langsamen Verdünnungswelle geht die Dichte des Mediums hinter der Welle gegen Null, man erhält Kavitation. Im Vergleich zur gewöhnlichen Hydrodynamik, in der die Kavitation eintritt beim Wegziehen des Kolbens mit einer Geschwindigkeit, die $2c_0/(\gamma - 1)$ übersteigt (c_0 : Schallgeschwindigkeit im nichtgestörten Medium), entsteht in der Magnetohydrodynamik die Kavitation auch bei geringeren Kolbengeschwindigkeiten, wenn nur die Bewegungsgeschwindigkeit des Kolbens in Querrichtung genügend groß ist. Wenn sich der Kolben nur

in Querrichtung bewegt, so tritt die Kavitation ein, wenn die Kolbengeschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit im ungestörten Medium [29] bei $\gamma = 5/3$ um den Faktor 3,67 übersteigt. Die Kavitation entsteht auch, wenn der Kolben in das Medium hineinbewegt und gleichzeitig in Querrichtung bewegt wird. Beim Einschießen des Kolbens mit Überschallgeschwindigkeit [60] tritt die Kavitation ein, wenn der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor des Kolbens und der Normale seiner Oberfläche größer wird als 70° (für $\gamma = 5/3$). In diesem Falle ist die Differenz zwischen der Geschwindigkeit, mit der sich die Grenz Medium — Vakuum verschiebt, und der Kolbengeschwindigkeit sehr klein.

Im Gegensatz zur langsamen Verdünnungswelle ist in einer schnellen Verdünnungswelle Kavitation unmöglich. Wenn im nichtgestörten Medium die Alfvénsche Geschwindigkeit wesentlich kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit, so wird bei maximaler Amplitude der schnellen Verdünnungswelle die Alfvénsche Geschwindigkeit hinter ihr von ähnlicher Größe sein wie die Schallgeschwindigkeit. Bei Einhaltung der Bedingung $H_0^2/8\pi \ll p_0$ wird die Dichte des Mediums im Punkte der größten Verdünnung (Punkt GV auf Bild 6) äußerst klein sein.

Bei Überschallgeschwindigkeit des Kolbens tritt Erzeugung eines Magnetfeldes ein, d. h. ein Anwachsen des Magnetfeldes von unendlich kleiner zu endlicher Größe; hierbei kommt der magnetische Druck in die Größenordnung des hydrostatischen oder übertrifft ihn. Beim Hineinschieben und Gleiten des Kolbens mit Überschallgeschwindigkeit ist das erzeugte Magnetfeld der Normalkomponente der Kolbengeschwindigkeit direkt proportional.

Die topologische Struktur des Bildes 6 kann man auch ohne Rechnung auf Grund qualitativer Überlegungen erhalten [61]. Dazu legen wir fest, durch welche Gebiete die Ordinatenachse $u_x = 0$ verläuft. Da die magnetischen Kraftlinien an das Medium und an den Kolben „angefroren“ sind, werden sie deformiert. Für $u_y < 0$ zeigt dies Bild 7a. Die Krümmung der magnetischen Kraftlinien führt zur Erscheinung quasielastischer Spannungen, die die Kraftlinien zu glätten versuchen (siehe den Pfeil auf Bild 7a).

Weil in der Nähe des Kolbens und im Unendlichen $v_x = 0$ ist, entsteht vor dem Pfeil eine Kompressionswelle (Stoßwelle) und dahinter eine Verdünnungswelle (Automodellwelle). Eine Alfvénsche Welle entsteht im vorliegenden Falle nicht, weil H_y in der Nähe des Kolbens und im Unendlichen gleiches Vorzeichen hat. (Erinnern wir uns, daß in Stoß- und Automodellwellen das Vorzeichen von H_y nicht geändert wird [38]; beim 180° -Alfvén-Sprung aber ändert es sich.) Auf diese Weise läuft bei $u_x = 0$, $u_y < 0$ vorn eine Stoßwelle, hinter ihr eine Automodellwelle (Kombination U^+R^-).

Analoge Überlegungen zeigen, daß in dem auf Bild 7b dargestellten Falle die Kombination R^+U^- auftritt. Bei Vergrößerung der Geschwindigkeit u_y ändert

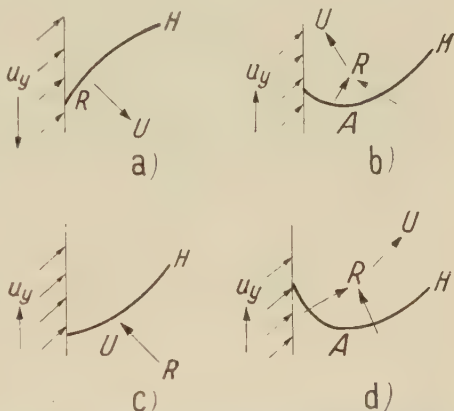


Bild 7. Ausbildung von Stoßwellen (U), Alfvénischen Sprüngen (A) und Dilatationswellen (R) auf Grund der Maxwellschen Spannungen bei Querbewegung des Kolbens.

sich das Vorzeichen von H_y in der Nähe des Kolbens. Das zieht das Auftreten einer Alfvénschen Welle (R^+AU^- , Bild 7c) nach sich. Bei weiterer Vergrößerung von u_y wird die Größe H_y in der Nähe des Kolbens größer als der Wert H_y im Unendlichen; dann ist die Resultierende der Spannungen vom Kolben weggerichtet (Bild 7d), das entspricht der Kombination U^+AR^- . Bei genügend großem Wert von u_y wird die Amplitude der Dilatationswelle so groß, daß die Dichte des Mediums hinter der Welle gleich Null wird; es tritt Kavitation ein.

Ein Bild der Bewegung des Mediums bei $u_x \neq 0$, $u_y \neq 0$, $u_z = 0$ kann man erhalten, wenn man vom im vorstehenden betrachteten Falle $u_x = 0$ ausgeht. Bei einer Vergrößerung von u_x wird die Amplitude der Dilatationswelle kleiner und die Amplitude der Kompressionswelle größer¹⁾. Bei einem gewissen Wert von u_x verwandelt sich die Dilatationswelle in eine Kompressionswelle. Analog führt eine Verkleinerung von u_x zur Wandlung der Kompressionswelle in eine Dilatationswelle. Eine weitere Verkleinerung der Größe u_x führt zum Auftreten der Kavitation. Bei Bewegung des Kolbens tritt eine Bremskraft F auf, die zwei Komponenten hat; die Längskomponente F_x (Frontwiderstand) und die Querkomponente F_y (Schubkraft). Bei einer schnellen Stoßwelle mit großer Amplitude, die im Bereich

$$u \gg c_0, \quad |u_y| \ll u_x, \quad H_0^2/8\pi \ll p_0$$

von einer langsamen Dilatationswelle begleitet wird, wird der Frontwiderstand durch die Formel

$$-F_x = \frac{(\gamma + 1)^2 \varrho_0 u_x^2}{2(\gamma - 1)}$$

bestimmt [60].

Wenn man $|u_y|$ bei fixiertem u_x vergrößert, so wird die Größe des Frontwiderstandes kleiner und nimmt auf der Kavitationslinie den Wert

$$-F_x = \frac{(\gamma + 1) \varrho_0 u_x^2}{2}.$$

an.

Bei weiterer Vergrößerung von $|u_y|$ verändert sich die Größe des Frontwiderstandes nicht.

Die Schubkraft wird bestimmt durch die Formeln

$$-F_y = \frac{(\gamma + 1) \varrho_0 u_x u_y}{\gamma - 1} \quad \text{mit} \quad |u_y| \ll u_x$$

bzw. im Falle der Kavitation

$$-F_y = \sqrt{\gamma + 1} \varrho_0 U_{0x} \operatorname{sign} u_y.$$

Der Fall, in dem die Geschwindigkeit des Kolbens nicht in der Ebene des Magnetfeldes (xy) liegt, d. h., wenn $u_z \neq 0$ ist, unterscheidet sich vom vorhergehenden dadurch, daß die Richtungsänderung des Magnetfeldes beim Alfvénschen Sprung von 180° verschieden ist.

¹⁾ Eine Ausnahme von dieser Regel findet man im Bereich U^+U^- bei Überschallgeschwindigkeit des Kolbens. Bei einer Vergrößerung von u_x geht eine Neuverteilung der Amplituden von schneller und langsamer Stoßwelle vor sich; das Anwachsen der Amplitude der schnellen Stoßwelle ist dabei begleitet von einer Verringerung der Amplitude der langsamen Stoßwelle.

§ 8 Zerfall eines Sprunges

Es erhebt sich die Frage: Was geschieht mit einem Sprung in den Anfangsbedingungen, wenn auf ihm die notwendigen Grenzbedingungen (Kontinuität der Massenströmung, des Impulses usw.) nicht erfüllbar sind? Solche Anfangsbedingungen erhält man z. B. beim Zusammenprall von Gasmassen oder bei plötzlicher Zerstörung einer Scheidewand zwischen zwei Gasen, die unter verschiedenem Druck stehen. Dieses Problem wurde von RIEMANN aufgeworfen und für die gewöhnliche Hydrodynamik von N. E. KOTCHINE [62] gelöst. Wie die Untersuchung zeigt, spaltet der Sprung in drei Wellen auf [34]: eine Welle, die sich nach rechts bewegt (Stoß- oder Automodellwelle), eine Welle, die sich nach links bewegt (Stoß- oder Automodellwelle) und einen tangentialen Sprung.

In der Magnetohydrodynamik verhält sich die Lösung des oben genannten Problems beim Fehlen eines longitudinalen Magnetfeldes H_x qualitativ ebenso wie beim Fehlen eines Magnetfeldes überhaupt [63]. Der Zusammenprall zweier Gasmassen mit $H_x = 0$ und nachfolgendem Zerfall des Sprunges wurde von T. F. VOLKOV [64] im Zusammenhang mit dem Problem der Plasmaaufheizung bis zu thermodynamischen Temperaturen durch Stoßwellen behandelt.

Der Zerfall des Sprunges im ruhenden Plasma mit $H_x = 0$, $|Ap^*| \ll p^*$ ($p^* = p + H^2/8\pi$) wurde von KATO [65] untersucht. Die erhaltene Lösung wurde zur qualitativen Betrachtung der Pulsation eines Plasmazyinders im longitudinalen Magnetfeld verwendet.

Wenn das longitudinale Magnetfeld H_x von Null verschieden ist, so ist die Spaltung des Ausgangssprunges in der Magnetohydrodynamik von der Aufspaltung in der gewöhnlichen Hydrodynamik qualitativ verschieden. Der Anfangssprung spaltet jetzt in sieben Wellen auf: drei Wellen, die sich nach rechts bewegen, drei Wellen, die sich nach links bewegen und zwischen ihnen ein Kontaktsprung, der relativ zum Medium ruht.

Jede dieser Wellen wird durch einen Parameter charakterisiert (durch eine Amplitude, d. h. durch den Sprung einer der magnetohydrodynamischen Größen). Andererseits ist die Summe aller Sprünge einer jeden magnetohydrodynamischen Größe in den sieben entstehenden Wellen gleich dem Anfangssprung. Weil die Zahl der magnetohydrodynamischen Größen gleich sieben ist ($\rho, p, v_x, v_y, v_z, H_y, H_z$), so erhalten wir ein System von sieben Gleichungen mit sieben Unbekannten, bei dessen Lösung wir die Amplituden aller Wellen finden, die beim Zerfall des Anfangssprunges entstehen.

Die allgemeine Lösung des Zerfallsproblems wurde wegen großer mathematischer Schwierigkeiten nicht gefunden. Für den Fall, daß der Anfangssprung sehr klein ist¹⁾, wurde das Problem gelöst [66]. In diesem Falle sind alle sich bildenden Sprünge ebenfalls klein. Da das Sprungverhältnis der magnetohydrodynamischen Größen in einer Automodell- und einer Stoßwelle kleiner Intensität in erster Näherung gleich ist, besteht der Unterschied zwischen einer Stoßwelle und einer Automodellwelle nur darin, daß in der Stoßwelle die Dichte wächst, während sie in der Automodellwelle abnimmt. Die Dichtesprünge in schnellen und langsamen

¹⁾ Der allgemeinere Fall, daß das System der magnetohydrodynamischen Grundgleichung durch ein hyperbolisches System aus n Gleichungen mit n Unbekannten ersetzt wird, wurde von LAX [19] untersucht.

magnetoakustischen Wellen werden durch die Formel

$$\Delta_{\pm}^{(e)} \varrho = \frac{1}{2R} \left\{ \frac{\varepsilon c^2 U_t^2 \left[\Delta \varrho - \left(\frac{\partial \varrho}{\partial s} \right)_p \Delta s \right]}{U_{\pm}^2 - U^2} - \varepsilon \frac{\Delta H_t^2}{8\pi} + \frac{\varrho U_x^2}{U_{\pm}} \left[\frac{H_t \Delta v_t}{H_x} + \frac{U_t^2 \Delta v_x}{U_{\pm}^2 - U_x^2} \right] \right\} \quad (8.1)$$

gegeben, dabei ist $R = \sqrt{(U^2 + c^2)^2 - 4c^2 U_x^2}$, $\Delta \varrho$: Dichtesprung, Δs : Entropiesprung, Δv : Geschwindigkeitssprung und ΔH_t : Sprung des transversalen Magnetfeldes im Anfangssprung; die Zeichen \pm haben denselben Sinn wie in (2.2). Mit der angeführten Formel kann man die Vorzeichen von $\Delta_{\pm}^{(e)} \varrho$ bestimmen, und damit erklären, in welche Wellen der Anfangssprung zerfällt. Der Stoßwelle entspricht ein $\Delta_{\pm}^{(e)} \varrho > 0$ und der Automodellwelle ein $\Delta_{\pm}^{(e)} \varrho < 0$.

Der Sprung in den Anfangsbedingungen hat Ähnlichkeit mit einer nichtevolutionären Stoßwelle. Obgleich im letzteren Falle alle Grenzbedingungen erfüllt werden, genügt eine unendlich kleine Störung, um die Grenzbedingungen zu verletzen. Eine Verletzung der Grenzbedingungen führt zu einer Spaltung der nichtevolutionären Stoßwelle in einige auslaufende Wellen (Sprungwellen oder stetige Wellen). Eine solche Spaltung wurde in [45] untersucht für den Fall, daß das Magnetfeld an beiden Seiten der Stoßwelle einen kleinen Winkel mit der Normale der Sprungfläche bildet und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Stoßwelle v_{1x} nahezu der Alfvénschen Geschwindigkeit U_{1x} entspricht, die größer ist als die Schallgeschwindigkeit c_1 . (Der Index 1 bezieht sich auf das Gebiet vor der Welle.) Die Evolutionsbedingung einer langsamen Stoßwelle ist in diesem Falle: $v_{1x} < U_{1x}$. Bei einer Störung dieser Bedingung wird die Stoßwelle nichtevolutionär. Eine solche nichtevolutionäre Stoßwelle kann man erhalten, wenn man eine gewöhnliche stabile hydrodynamische Stoßwelle, bei der $v_{1x} > c_1$ und $v_{2x} < c_2$ ist, in ein Magnetfeld bringt. Wenn das transversale Magnetfeld H_y gleich Null ist, so kann die betrachtete Stoßwelle in zwei getrennte Stoßwellen gespalten werden [42], wobei die magneto-hydrodynamischen Größen in dem zwischen diesen Wellen eingeschlossenen Gebiet gegeben sind durch:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varrho} &= \frac{\varrho_1 v_{1x}^2}{U_{1x}^2}, \quad \tilde{v}_x = \frac{U_{1x}^2}{v_{1x}}, \\ \tilde{p} &= p_1 + \frac{\varrho_1 (v_{1x}^2 - U_{1x}^2) (3c_1^2 + v_{1x}^2 - U_{1x}^2)}{3U_{1x}^2}, \\ \tilde{v}_y &= \pm \left[\frac{2(v_{1x}^2 - U_{1x}^2) (4U_{1x}^2 - v_{1x}^2 - 3c_1^2)}{3v_{1x}^2} \right]^{1/2}, \\ \tilde{H}_y &= \pm \left[\frac{8\pi \varrho_1 (v_{1x}^2 - U_{1x}^2) (4U_{1x}^2 - v_{1x}^2 - 3c_1^2)}{3U_{1x}^2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Eine solche Spaltung ist nur möglich [45], wenn die Evolutionsbedingung $v_{1x} < U_{1x}$ nicht erfüllt ist. Das folgt daraus, daß bei $v_{1x} < U_{1x}$ die Ausdrücke für v_y und H_y imaginär werden.

Berücksichtigt man ein schwaches transversales Magnetfeld, so wird die nichtevolutionäre Ausgangsstoßwelle in vier Wellen gespalten (wenn man Wellen

nicht berücksichtigt, deren Amplituden die Größenordnung $\propto H_{1y}$ haben, $\alpha \equiv \sqrt{(v_{1x} - U_{1x})/U_{1x}} \ll 1$. Man erhält eine nach links (die x -Achse zeigt nach rechts) laufende schnelle Stoßwelle mit einer Amplitude der Größenordnung α und einer Geschwindigkeit der Größenordnung $U_{1y} \equiv H_{1y}/\sqrt{4\pi\rho_1}$; eine nach links laufende langsame Stoßwelle mit einer Amplitude, die sich wenig von der Amplitude der Ausgangswelle unterscheidet und mit einer Geschwindigkeit der Größenordnung $\propto H_{1y}$ läuft; außerdem einen nach rechts laufenden Alfvénschen Sprung, der das Magnetfeld um 180° dreht, und schließlich eine nach rechts laufende schnelle Stoßwelle mit einer Amplitude der Größenordnung H_{1y} .

Mit dem Zerfall des Sprunges in den Anfangsbedingungen ist die Frage der Übergänge zwischen magnetohydrodynamischen Sprüngen eng verbunden¹⁾. Die Berücksichtigung der Evolutionsbedingungen verändert ein wenig das Bild der möglichen Übergänge. Vor allem erweist sich die Behauptung, daß der Alfvénsche Sprung stetig in eine Stoßwelle übergehen kann, als unwahr. Denn der Alfvénsche Sprung könnte mit einer Stoßwelle nur dann zusammenfallen, wenn das Magnetfeld bis zum Sprung und nach ihm in einer Ebene liegt. Im Alfvénschen Sprung wird dann das

Magnetfeld um 180° gedreht. Aber dabei verändert die transversale Komponente des Magnetfeldes das Vorzeichen, während sich auf einer Stoßwelle das Vorzeichen der transversalen Komponente des Magnetfeldes nicht ändert. Deshalb ist ein Übergang zwischen einem Alfvénschen Sprung und einer evolutionären Stoßwelle nicht möglich. Es geht aber eine (nicht wirklich existierende) nichtevolutionäre langsame Stoßwelle formal stetig in einen Alfvénschen Sprung über [47] (siehe Bild 2).

Zwischen einer schnellen und einer langsamen Stoßwelle sind stetige Übergänge ebenfalls unmöglich. Das folgt daraus, daß die Bereiche, in denen schnelle und langsame Stoßwellen existieren, nicht zusammenhängen (siehe Bild 2).

Ebenso kann eine schnelle Stoßwelle nicht stetig in einen tangentiellen Sprung übergehen, weil das den Bedingungen (4.3) widersprechen würde. Deshalb sind Übergänge nur zwischen tangentiellen und Kontaktsprüngen, zwischen tangentiellen und Alfvénschen Sprüngen und zwischen einem tangentiellen Sprung und einer langsamen Stoßwelle möglich. Die Bedeutung möglicher Übergänge zwischen magnetohydrodynamischen Sprüngen wird klarer, wenn man das Problem des Zerfalls willkürlicher Sprünge in den Anfangsbedingungen untersucht. Wenn das normale Magnetfeld H_x von Null verschieden ist, so zerfällt der Sprung in sieben Wellen, jede von ihnen wird durch einen Parameter charakterisiert.

Wenn das normale Magnetfeld H_x gleich Null ist, so zerfällt der Anfangssprung in drei Wellen: eine schnelle Stoßwelle, die sich nach rechts bewegt; eine schnelle Stoßwelle, die sich nach links bewegt, und einen tangentiellen Sprung zwischen ihnen. Jede der Stoßwellen wird durch einen Parameter charakterisiert, der tangentielle Sprung durch fünf Parameter [30]. Die Gesamtzahl der Parameter ist gleich sieben, d. h. gleich der Zahl der Sprünge magnetohydrodynamischer Größen auf dem Anfangssprung.

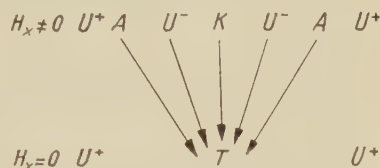


Bild 8. Schema der Übergänge zwischen magnetohydrodynamischen Sprüngen. Die Buchstaben U^+ , U^- , A , K , T kennzeichnen schnelle und langsame Stoßwellen, Alfvénsche, Kontakt- und Tangentialsprünge.

¹⁾ Diese Frage wurde erstmals in der Arbeit [32] von S. I. SYROVATSKIJ behandelt.

Aus diesem Grunde stellt der tangentielle Sprung die Vereinigung von fünf Sprüngen dar (zwei langsame Stoßwellen, zwei Alfvénsche Sprünge, ein Kontaktsprung). Ein Schema der Übergänge zwischen magnetohydrodynamischen Sprüngen ist auf Bild 8 dargestellt.

Übersetzt von L. u. M. ROTHHARDT
Deutsche Red. durch L. ROTHHARDT

Literatur

- [1] Angewandte Magnetohydrodynamik, Arbeiten des physikalischen Instituts der Lettischen SSR (Prikladnaja magnitogidrodinamika, Tr. instituta fiziki A. N. Latv. SSR), Band 8 (1956).
- [2] J. SHERCLIFF, Proc. Roy. Soc. **A 233**, 396 (1955).
- [3] H. ALFVÉN, Cosmical Electrodynamics, Clarendon Press Oxford (1950).
- [4] W. M. ELSASSER, Amer. J. Phys. **23**, 590 (1955); **24**, 85 (1956).
- [5] S. I. BRAGINSKIJ, V. D. ŠAFRANOV, Arbeiten der zweiten internationalen Konferenz über die friedliche Anwendung der Atomenergie, Genf 1958, Vortrag Nr. 2500¹⁾²⁾.
- [6] I. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMAN, M. D. KRUSKAL, R. M. KULSRUD, Proc. Roy. Soc. **A 244**, 17 (1958).
- [7] L. SPITZER, Phys. Fluids **1**, 253 (1958).
- [8] L. A. ARCIMOVIČ, Uspechi fiz. Nauk **66**, 545 (1958); deutsch in Fortschr. Phys. **7**, 422 (1959).
- [9] E. L. RESLER, W. R. SEARS, J. Aeronaut. Sci. **25**, 235 (1958).
- [10] A. KANTROWITZ, Aeronaut. Eng. Rev. **17**, 63 (1958).
- [11] S. M. OSOVEC, JU. F. NASEDKIN, E. I. PAVLOV, JU. F. PETROV, N. J. ŠČEDRIN, Arbeiten der zweiten internationalen Konferenz über die friedliche Anwendung der Atomenergie, Genf 1958, Vortrag Nr. 2225¹⁾²⁾.
- [12] J. TUCK, Arbeiten der zweiten Internationalen Konferenz über die friedliche Anwendung der Atomenergie, Genf 1958, Vortrag Nr. 1860¹⁾³⁾.
- [13] F. L. RIBE, Proc. of the IV. International Conference on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala 1959; North Holland Publ. Co., Amsterdam (1960) S. 144.
- [14] L. HELFER, Astrophys. J. **117**, 177 (1953).
- [15] M. N. KOGAN, Prikl. mat. i mech. **23**, 70 (1959).
- [16] M. D. LADYŽENSKIJ, Prikl. mat. i mech. **23**, 993 (1959).
- [17] J. E. ALLEN, Proc. Phys. Soc. **B 70**, 24 (1957).
- [18] F. DE HOFFMAN, E. TELLER, Phys. Rev. **80**, 692 (1950).
- [19] P. LAX, Commun. Pure and Appl. Math. **10**, 537 (1957).
- [20] A. I. ACHIEZER, G. JA. LJUBARSKIJ, R. V. POLOVIN, Ukrain. fiz. Ž. **3**, 433 (1958); Žurn. techn. Fiz. **29**, 993 (1959).
- [21] N. MUGIBAYASHI, Progr. Theor. Phys. **20**, 241 (1958).
- [22] A. G. KULIKOVSKIJ, Dokl. Akad. Nauk SSSR **114**, 984 (1957).
- [23] S. A. KAPLAN, K. P. STANJUKOVIČ, Dokl. Akad. Nauk SSSR **95**, 769 (1954).
- [24] S. SEGRE, Nuovo Cimento **9**, 1054 (1958).
- [25] T. TANIUTI, Progr. Theor. Phys. **19**, 69 (1958).
- [26] A. G. KULIKOVSKIJ, Dokl. Akad. Nauk SSSR **121**, 987 (1958).
- [27] G. JA. LJUBARSKIJ, P. V. POLOVIN, Žurn. eksper. teor. Fiz. **35**, 509 (1958).
- [28] G. JA. LJUBARSKIJ, P. V. POLOVIN, Ukrain. fiz. Žurn. **3**, 567 (1958).
- [29] J. BAZER, Astrophys. J. **128**, 686 (1958).
- [30] L. D. LANDAU, E. M. LIFŠIC, Elektrodynamik der Kontinua (Elektrodinamika splošnych sred), Gostechizdat, Moskau (1957).
- [31] R. LÜST, Z. Naturf. **8a**, 277 (1953).
- [32] S. I. SYROVATSKIJ, Arbeiten des Physikalischen Instituts der Akademie der Wissenschaften der UdSSR (Tr. F. I. A. N. SSSR) **8**, 13 (1956).
- [33] S. I. SYROVATSKIJ, Žurn. eksper. teor. Fiz. **24**, 622 (1953).

- [33a] I. M. GEL'FAND, Uspechi mat. Nauk **14**, 87 (1959).
- [34] L. D. LANDAU, E. M. LIFŠIC, Mechanik der Kontinua (Mechanika splošnych sred), Gostechizdat, Moskau (1953).
- [35] R. COURANT, K. O. FRIEDRICHS, Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience Publishers, New York (1948).
- [36] S. V. IORDANSKIJ, Dokl. Akad. Nauk SSSR **121**, 610 (1958).
- [37] R. V. POLOVIN, G. JA. LJUBARSKIJ, Žurn. eksper. teor. Fiz. **35**, 510 (1958).
- [38] R. V. POLOVIN, G. JA. LJUBARSKIJ, Ukrain. fiz. Žurn. **3**, 571 (1958).
- [39] I. NEJMAN, Probleme der kosmischen Aerodynamik (Problemy kosmičeskoj aërodinamiki) I. L. Moskau (1953), S. 93—99.
- [40] A. I. ACHIEZER, G. JA. LJUBARSKIJ, R. V. POLOVIN, Žurn. eksper. teor. Fiz. **35**, 731 (1958).
- [41] K. I. BABENKO, I. M. GEL'FAND, Naučnye dokl. vysšej školy, serija fiz.-mat. nauk **1**, 4 (1958).
- [42] S. I. SYROVATSKIJ, Žurn. eksper. teor. Fiz. **35**, 1466 (1958).
- [43] A. I. ACHIEZER, G. JA. LJUBARSKIJ, R. V. POLOVIN, Arbeiten der zweiten internationalen Konferenz über die friedliche Anwendung der Atomenergie, Genf 1958, Vortrag Nr. 2509¹⁾ 2).
- [44] V. M. KONTOROVIČ, Žurn. eksper. teor. Fiz. **35**, 1216 (1958).
- [45] G. JA. LJUBARSKIJ, P. V. POLOVIN, Žurn. eksper. teor. Fiz. **36**, 1272 (1959).
- [46] R. LÜST, Z. Naturf. **10a**, 125 (1955).
- [47] J. BAZER, W. B. ERICSON, Astrophys. J. **129**, 758 (1959).
- [48] H. ALFVÉN, Phys. Rev. **75**, 1732 (1949).
- [49] G. K. BATCHELOR, Proc. Roy. Soc. A **201**, 405 (1950).
- [50] V. C. A. FERRARO, Proc. Roy. Soc. A **233**, 310 (1956).
- [51] A. R. KANTROWITZ, G. E. PETSCHER, in: Magnetohydrodynamics, Stanford University Press, Stanford (1957), S. 3—15.
- [52] G. H. A. COLE, Advances in Physics **5**, 452 (1956).
- [53] F. A. BAUM, S. A. KAPLAN, K. P. STANJUKOVIČ, Einführung in die kosmische Gasdynamik (Vvedenie v kosmičeskuju gazodinamiku), Fizmatgiz, Moskau (1958).
- [54] S. I. SYROVATSKIJ, Uspechi fiz. Nauk **62**, 247 (1957), dt. Übers.: Fortschr. Phys. **6**, 437 (1958).
- [55] R. V. POLOVIN, V. P. DEMUCKIJ, Ukrain. fiz. Žurn. **5**, 3 (1960).
- [56] G. S. GOLICYN, Žurn. eksper. teor. fiz. **35**, 776 (1958).
- [57] S. A. KAPLAN, Interstellare Gasdynamik (Mežzvezdnaja gazodinamika) Fizmatgiz, Moskau (1958).
- [58] J. BAZER, O. FLEISCHMAN, Phys. Fluids **2**, 366 (1959).
- [59] G. JA. LJUBARSKIJ, R. V. POLOVIN, Dokl. Akad. Nauk SSSR **128**, 684 (1959).
- [60] R. V. POLOVIN, Žurn. eksper. teor. Fiz. **38**, 1544 (1960).
- [61] A. I. ACHIEZER, R. V. POLOVIN, Žurn. eksper. teor. Fiz. **38**, 529 (1960).
- [62] N. E. KOTCHINE, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo **50**, 305 (1926).
- [63] S. A. KAPLAN, K. P. STANJUKOVIČ, Dokl. Akad. Nauk SSSR **95**, 769 (1954).
- [64] T. F. VOLKOV, Physik des Plasmas und Probleme der gesteuerten thermonuklearen Reaktionen (Fizika plazmy i problema upravljaemych termojadernych reakcij) Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskau (1958), Bd. 3, S. 148—52.
- [65] Y. KATO, Progr. Theor. Phys. **21**, 409 (1959).
- [66] G. JA. LJUBARSKIJ, R. V. POLOVIN, Žurn. eksper. teor. Fiz. **35**, 1291 (1958).

¹⁾ Proceedings of the Second International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Vol. 31 & 32, United Nations, Geneva (1958).

²⁾ Trudy vtoroj meždunarodnoj konferencii po mirnomu ispol'zovaniju atomnoj energii, doklady sovjetskich učenyh, jadernaja fizika, Atomizdat Moskau (1959).

³⁾ Trudy vtoroj meždunarodnoj konferencii, izbrannye doklady inostrannyh učenyh, fizika gorjačej plazmy i termojadernye reakcii, Atomizdat Moskau (1959).

Herausgeber: Prof. Dr. Rudolf Ritschl und Prof. Dr. Robert Rompe; Manuskripte sind zu richten an die Schriftleitung: II. Physikalisches Institut der Humboldt-Universität Berlin, Berlin N 4, Hessische Str. 2. Verlag: Akademie-Verlag GmbH, Berlin W 8, Leipziger Str. 3-4, Fernruf: 220441, Telex-Nr. 011773, Postscheckkonto: Berlin 35021. Die Zeitschrift „Fortschritte der Physik“ erscheint monatlich; Bezugspreis dieses Heftes DM 6,-. Bestellnummer dieses Heftes: 1027/9/10. — Satz und Druck: Druckhaus „Maxim Gorki“, Altenburg, Bez. Leipzig, Carl-von-Ossietzky-Str. 30-31. — Veröffentlicht unter der Lizenznummer ZLN 5028 des Ministeriums für Kultur. Printed in Germany.

Aus dem Inhalt der folgenden Hefte:

V. S. BARASHENKOV, V. M. MALTSEV: Cross Sections for Elementary Particle Interactions

H. PAULY: Streuversuche an Molekularstrahlen und zwischenmolekulare Kräfte

H. JOOS: Zur Darstellungstheorie der inhomogenen Lorentzgruppe als Grundlage quantenmechanischer Kinematik

V. S. BARASHENKOV, H. J. KAISER: Electric and Magnetic Polarizabilities of the Nucleons and Pions

L. D. LANDAU und E. M. LIFSCHIZ

Lehrbuch der theoretischen Physik

Band I: Mechanik

(Übersetzung aus dem Russischen)

In deutscher Sprache herausgegeben von Gerhard Heber

1962. X, 193 Seiten — 55 Abbildungen — gr. 8° — Ganzleinen 16,— DM

Die auf ihrem Gebiet bekannten Verfasser schrieben das neun Bände umfassende große Lehrbuch der theoretischen Physik, dessen erster Band hier vorliegt. Im Vergleich zu anderen Mechanik-Lehrbüchern stellt es höhere Anforderungen an den Leser, da er von Anfang an mit den fundamentalen Begriffen der Physik wie Lagrange-Funktion, Prinzip der kleinsten Wirkung, Erhaltungssätze vertraut gemacht wird. Mit diesen Grundlagen beginnend werden über den sonst in Mechanik-Lehrbüchern gebotenen Stoff hinausgehend eine Fülle von Dingen in übersichtlicher Weise erläutert, z. B. die Streuung von Teilchen (einschließlich des Begriffs des Wirkungsquerschnitts), die Schwingung von Molekülen und die parametrische Resonanz. Viele Aufgaben mit Lösungen erleichtern das Studium. So wendet sich dieses Lehrbuch an Studenten höherer Semester, besonders aber auch an alle theoretisch interessierten Physiker.

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

BEITRÄGE AUS DER PLASMAPHYSIK

Herausgegeben von Robert Rompe und Max Steenbeck

ERSCHEINUNGSWEISE:

vierteljährlich 1 Heft mit 64 Seiten

im Format $16,7 \times 24$ cm zum Preise von 11,— DM je Heft

Bisher liegen vor: Band I, Heft 1—4

Die Zeitschrift veröffentlicht zusammenfassende Berichte und Stellungnahmen namhafter Autoren zu aktuellen Problemen der theoretischen und experimentellen Plasmaphysik. Ferner werden Originalmitteilungen in deutscher, englischer, russischer und französischer Sprache aufgenommen, die durch ihre Ergebnisse oder durch ihre Fragestellung von besonderer Bedeutung für die Plasmaphysik sind.

Aus dem Inhalt des 4. Heftes:

E. Hantzsche

Theorien des Kathodenfalls

F. Kümmel

Zustandsänderungen im isothermen Argon-Plasma

R. Rompe, S. Ullrich und H. Wolff

Zum Verhalten von Elektronen in Niederdruckplasmen

J. Wilhelm

Zur phänomenologischen Beschreibung eines diffusionsbestimmten Säulenplasmas



AKADEMIE-VERLAG · BERLIN